BORIS APSEN

REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE

1

TEHNIČKA KNJIGA · ZAGREB

S A D R Ž A J

Strana

§ 1. O BROJEVIMA 11

1. Realni brojevi 11

a) Racionalni brojevi 11

b) Iracionalni brojevi 13

2. Kompleksni brojevi 14

a) Pojam 14

b) Grafičko prikazivanje kompleksnih brojeva . 15

c) Trigonometrijski oblik kompleksnog broja . 16

d) Operacije s kompleksnim brojevima . . 18

1) Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva . . 18

1. Zbrajanje kompleksnih brojeva . . 18

2. Oduzimanje kompleksnih brojeva . . 18

2) Množenje kompleksnih brojeva 19

3) Potenciranje kompleksnih brojeva 19

4) Dijeljenje kompleksnih brojeva 20

5) Korjenovanje kompleksnih brojeva 20

§ 2. O SLJEDOVIMA I LIMESIMA 25

1. Pojam slijeda i njegova limesa. Konvergentni i divergentni sljedovi 25

2. Limesi sljedova $a_n = |x|^n$, $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$ i $a_n = \sqrt[n]{x}$ . . 28

3. Teorem o monotonim sljedovima. Broj e 28

4. Tačka gomilanja 30

5. Operacije s limesima 30

§ 3. OPĆENITO O FUNKCIJAMA 33

1. Realna promjenljiva veličina 33

2. Pojam funkcije 33

3. Načini kojima funkcija može biti zadana . . . 34

4. Interval definicije funkcije 34

5. Jednoznačne i višeznačne, eksplicitne i implicitne funkcije 36

6. Jednadžba funkcije u polarnim koordinatama . . . 37

7. Grafičko predočivanje funkcija 37

Strana

§ 7. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) FUNKCIJE 99

§ 8. NEPREKINUTOST ILI KONTINUITET FUNKCIJA . . 101

1. Pojam neprekinutosti funkcije 101

2. Teorem o neprekinutosti funkcija. Neprekinutost cijele i razlomljene racionalne funkcije . . . 103

3. Neprekinutost goniometrijskih funkcija 103

4. Neprekinutost eksponencijalne funkcije i hiperbolnih funkcija 104

5. Neprekinutost inverznih funkcija 105

6. Svojstva neprekinute funkcije 105

§ 9. ASIMPTOTE KRIVULJA 107

1. Pojam 107

2. Asimptote usporedne s koordinatnim osima . . 107

3. Asimptote kose obzirom na koordinatne osi . . 110

4. Krivulja je zadana u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$. 118

§10. DERIVACIJA FUNKCIJE 121

1. Pojam derivacije 121

2. Grafičko deriviranje 123

3. Jednadžba tangente i normale 124

4. Derivacije pojedinih funkcija. Pravila za deriviranje . 127

a) Derivacija $y = x^n$ 127

b) Derivacija $y = C$ (konstanta) 128

c) Derivacija zbroja (razlike) funkcija . . . 128

d) Derivacija $y = \sin x$ 128

e) Derivacija $y = \cos x$ 129

f) Derivacija umnoška dviju i više funkcija . 129

g) Derivacija kvocijenta dviju funkcija . . . 131

h) Derivacije funkcija $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ . . 131

i) Posebni slučajevi derivacije kvocijenta . . 132

j) Derivacija logaritamske funkcije 133

5. Derivacije inverznih funkcija 134

a) Općenito 134

b) Derivacije ciklometrijskih funkcija . . . 135

c) Derivacije eksponencijalnih funkcija . . . 136

6. Derivacije hiperbolnih funkcija 137

7. Derivacije Area-funkcija 138

8. Složene funkcije 138

a) Pojam složene funkcije 138

b) Konstrukcija **grafa složene funkcije** . . . 139

c) Derivacije složenih funkcija 142

Strana

9. Derivacije opće potencije 144
10. Posebna vrsta derivacije 148

§11. DERIVACIJE VIŠEG REDA 151
§12. ROLLEOV TEOREM 153
§13. TEOREM SREDNJE VRIJEDNOSTI 155
§14. NEPREKINUTOST I DERIVACIJA 159
§15. NEODREĐENI OBLICI. L'HOSPITALOVO PRAVILO . . 161

1. Oblici $\frac{0}{0}$ **i** $\frac{\infty}{\infty}$ 161
2. Oblici $0 \cdot \infty$ **i** $\infty - \infty$ 163
3. Oblici 0^0, 1^∞ **i** ∞^0 164

§16. DULJINA TANGENTE I NORMALE, SUPTANGENTE I SUBNORMALE 167
§17. EKSTREMNE VRIJEDNOSTI I TAČKE INFLEKSIJE FUNKCIJE $y = y(x)$ 169

1. Značenje predznaka prve derivacije funkcije . . 169
2. Nuždan uvjet za ekstrem funkcije $y = y(x)$ . . . 170
3. Konveksnost i konkavnost krivulje. Dovoljan uvjet za ekstrem. Nuždan uvjet za tačku infleksije . . . 172
4. Napomene za određivanje ekstremnih vrijednosti funkcije $y = y(x)$ 182
5. Najopćenitiji dovoljni uvjet za ekstrem . . . 187
6. Određivanje tačaka infleksije funkcije $y = f(x)$ . . 190
7. Određivanje ekstremnih vrijednosti implicitnih funkcija 192

§18. KINEMATIČKO ZNAČENJE PRVE I DRUGE DERIVACIJE FUNKCIJE 195
§19. PRIBLIŽNO RJEŠAVANJE ALGEBARSKIH I TRANSCENDENTNIH JEDNADŽBI 197

1. Općenito o rješavanju jednadžbi 197
2. Grafički način 197
3. Računski način 201
a) Metoda sekante ili regula falsi 201
b) Metoda tangente (Newtonova metoda) . . . 206
c) Kombinirana metoda 212
d) Metoda iteracije (opetovanog uvrštavanja) . 213

§20. BESKONAČNI REDOVI 215

1. Pojam konvergencije i divergencije reda . . . 215
2. Beskonačni geometrijski redovi 220
3. Nuždan uvjet za konvergenciju redova uopće . . 224
4. Dovoljan uvjet za konvergenciju redova 224

Znak $>$ znači „veći od"
Znak $<$ znači „manji od"

Apsolutna vrijednost broja a, tj. $|a|$, je vrijednost toga broja bez obzira na njegov predznak. Grafički je apsolutna vrijednost udaljenost tačke od ishodišta. Npr. (vidi sl. 1.):

$$|+3| = \overline{OA} = 3; \; |-3| = \overline{OB} = 3; \; |3-2| = \overline{AC} = 1 \text{ i } |2-3| = \overline{CA} = 1.$$

Dakle:

$$|a-b| = |b-a| \qquad (1)$$

Lako se da pokazati, da *apsolutna vrijednost zbroja nije veća, tj. ona je manja ili jednaka zbroju apsolutnih vrijednosti pribrojnika,* tj.

$$|a+b| \leqq |a| + |b|. \qquad (2)$$

Primjeri:

Prema (1): $|(\pm 2) + (\pm 3)| = |\pm 5| = 5.$

Prema (2): $|(\pm 2) + (\pm 3)| = |\pm 2| + |\pm 3| = 2 + 3 = 5$

dakle: $\underline{|(\pm 2) + (\pm 3)| = |\pm 2| + |\pm 3|}$

Prema (1): $|(-2) + (+3)| = |+1| = 1$

Prema (2): $|(-2) + (+3)| < |-2| + |+3| = 2 + 3 = 5$

dakle: $\underline{|(-2) + (+3)| < |-2| + |+3|}$

Vidimo da znak jednakosti vrijedi samo u tom slučaju, kada su svi pribrojnici istog predznaka, inače je uvijek znak manje ($<$).

Apsolutna vrijednost umnoška jednaka je umnošku apsolutnih vrijednosti množitelja:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad (3)$$

Apsolutna vrijednost potencije jednaka je potenciji apsolutne vrijednosti baze:

$$|a^n| = |a|^n \qquad (4)$$

Apsolutna vrijednost kvocijenta jednaka je kvocijentu apsolutnih vrijednosti dividenda i divizora:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (5)$$

Apsolutna vrijednost korijena jednaka je korijenu iz apsolutne vrijednosti radikanda:

$$\left|\sqrt[n]{a}\right| = \sqrt[n]{|a|} \qquad (6)$$

naravno uz uvjet: ako je radikand a negativan, eksponent n mora biti neparan, jer korijen s parnim eksponentom iz negativnog broja ne postoji u realnom području.

b) Iracionalni brojevi

To su brojevi, koje ne možemo prikazati u obliku $\frac{m}{n}$, gdje su m i n cijeli brojevi.

Oni se prikazuju u obliku beskonačnih decimalnih neperiodskih razlomaka:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$
$$\log 2 = 0{,}30103\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159\ldots$$
$$e = 2{,}71828\ldots$$
$$M = 0{,}43429\ldots$$

Pokažimo na primjeru $\pi = 3{,}14159\ldots$ što znači zadati iracionalan broj:

$\pi = 3{,}14159\ldots$ znači:

Lijevi slijed		Desni slijed	Razmak u kojem leži broj π
3	$< \pi <$	4	1
3,1	$< \pi <$	3,2	$0{,}1 = \frac{1}{10}$
3,14	$< \pi <$	3,15	$0{,}01 = \frac{1}{10^2}$
3,141	$< \pi <$	3,142	$0{,}001 = \frac{1}{10^3}$
...	..	...	....
...	..	...	....

U ovakvom je slučaju iracionalni broj zadan s dva slijeda ili niza racionalnih brojeva slijedećih svojstava:

1) lijevi slijed raste,

2) desni slijed pada,

3) svaki član lijevoga slijeda je manji od svakog člana desnog slijeda i

4) razlika između svakog para članova iz lijevog i desnog slijeda može se načiniti po volji malena.

Idemo li prema tome u objema sljedovima sve dalje i dalje, steže se sve više razmak u kojem leži dotični iracionalni broj, pa ga možemo po volji tačno aproksimirati*) pomoću racionalnih brojeva iz tih sljedova. Stoga se s iracionalnim brojevima računa tako, da se uzimaju njihove približne vrijednosti iz lijevog slijeda racionalnih brojeva (npr. $\pi = 3{,}14$), to su aproksimacije iracionalnog broja na manje, ili iz desnog slijeda (npr. $\pi = 3{,}15$), to su aproksimacije iracionalnog broja na više.

---

*) Aproksimirati znači uzeti za broj ili općenito za neku veličinu njenu približnu vrijednost, „aproksimacija" je dakle približna vrijednost.

Prema slici 2 je dakle

$$|z| = |x+iy| = +\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (10)$$

Također: $|i| = 1$, $|-i| = 1$, $|9i| = 9$, $|-2+3i| = +\sqrt{4+9} = +\sqrt{13}$ itd.

Primjer: Neka se prikažu grafički kompleksni brojevi (vidi sliku 3):

1) $z_1 = 4$; $z_2 = -2$; $z_3 = 3i$; $z_4 = -4i$; $z_5 = 2+4i$,

2) $z_6 = 3+2i$ i $-z_6 = -3-2i$,

3) $z_7 = -2+3i$ i $\bar{z}_7 = -2-3i$.

Iz slike 3 slijedi:

1) Realni brojevi leže na realnoj osi X, čisto imaginarni na imaginarnoj osi Y, a kompleksni između tih osi (vidi z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).

2) z i $-z$ leže simetrično s obzirom na ishodište O (vidi z_6 i $-z_6$).

3) Konjugirano kompleksni brojevi z i $\bar{z}$ leže simetrično s obzirom na realnu os X (vidi z_7 i $\bar{z}_7$).

2. Kompleksni broj možemo prikazati i u obliku vektora, tj. veličine kod koje se razlikuje duljina, smjer i smisao.

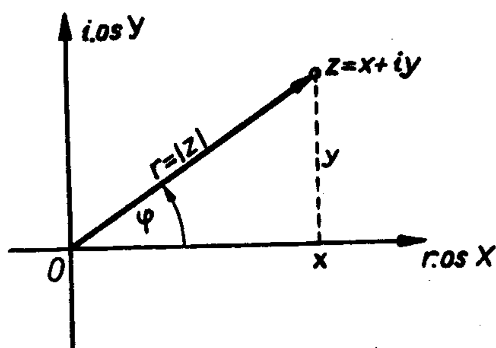
(*Skalar* ima samo numeričku vrijednost, npr. masa 5 kg, temperatura $-12\,^{\circ}$C itd.)

U sl. 4 prikazan je kompleksni broj $z = x + iy$ u obliku vektora (dužine sa strelicom), kojemu su duljina i smjer dani izrazima:

$$r = |z| = +\sqrt{x^2+y^2} \qquad (11)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

a smisao je prikazan strelicom.



Sl. 4.

c) Trigonometrijski oblik kompleksnog broja —

Prema sl. 4 imademo:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi.$$

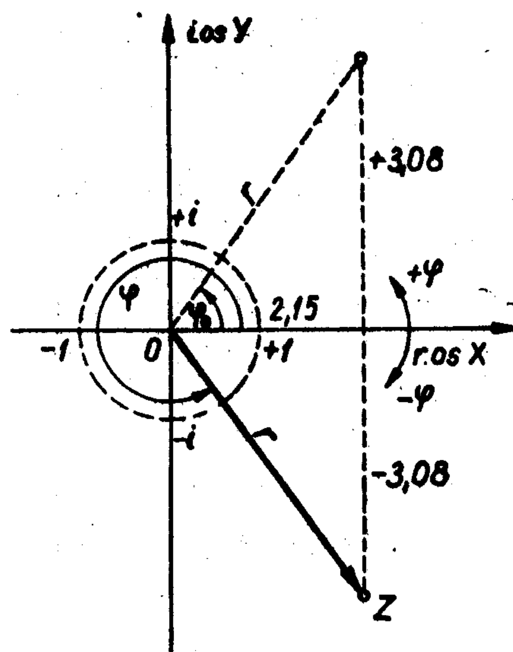
Ako to uvrstimo u $z = x + iy$, dobit ćemo kompleksni broj u trigonometrijskom obliku:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (12)$$

pri čemu se φ i r računaju iz formula:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \quad r = +\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{ili} \quad r = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi} \qquad (12a)$$

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja, $r = |z|$, mijenja se od 0 do $+\infty$, a argument ili amplituda φ od $-\infty$ do $+\infty$, pri čemu se smisao okretanja oko ishodišta O uzima pozitivnim, ako je protivan smislu okretanja kazaljke na satu.



Sl. 5.

Primjer. Neka se kompleksni broj $z = 2{,}15 - 3{,}08\,i$ prikaže u trigonometrijskom obliku i u obliku vektora.

$$x = 2{,}15$$
$$y = -3{,}08$$

Prema (12a): $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{3{,}08}{2{,}15}$,

$$r = \frac{2{,}15}{\cos\varphi} = \frac{-3{,}08}{\sin\varphi}$$

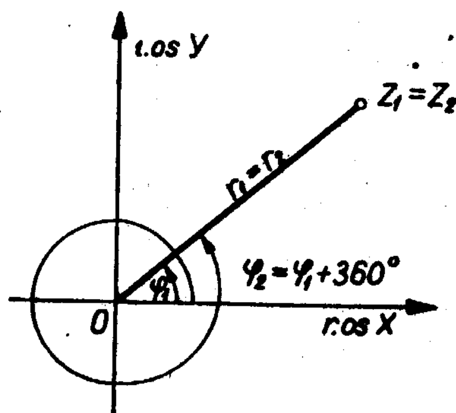
Prema slici 5: $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{3{,}08}{2{,}15}$; $\varphi = 360^\circ - \varphi_0$; $r = \frac{2{,}15}{\cos\varphi_0} = \frac{3{,}08}{\sin\varphi_0}$.

Računajmo:

y	$-3{,}08$	n 0,48855	I	
x	$+2{,}15$	0,33244	II	
$\operatorname{tg}\varphi$		n 0,15611	I — II	611
φ_0	$55^\circ 4' 58''$	10,15611 — 10		— 585
$\sin\varphi_0$		9,91381 — 10	III	26 : 0,45 = 58"
$\cos\varphi_0$		9,75770 — 10	IV	0,15 · 58 = 8,7 ± 9
r	3,756	0,57474	I — III	— 0,30 · 58 = — 17,4 ± — 17
$\varphi = 360^\circ - \varphi_0$	$304^\circ 55' 02''$	0,57474	II — IV	

$\varphi = 304^\circ 55' 02''$
$r = 3{,}756$

$z = 3{,}756\,(\cos 304^\circ 55' 02'' + i \sin 304^\circ 55' 02'')$.



Sl. 6.

Primjedba: **Kako je realan broj samo poseban slučaj kompleksnog broja, kojemu je imaginarni dio $y = 0$, možemo i realne brojeve prikazati u trigonometrijskom obliku, pri čemu će pozitivni realni brojevi imati $\varphi = 0$, a negativni $\varphi = 180^\circ$, jer prvi leže na desnoj, a drugi na lijevoj strani osi X (vidi sl. 3).**

Npr. $5 = 5(\cos 0 + i \sin 0)$
$-4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

Iz slike 6 vidi se, da su dva kompleksna broja napisana u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$
$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

jednaka, tj. $z_2 = z_1$, kad su im jednake apsolutne vrijednosti, tj.

$$r_2 = r_1,$$

a argumenti φ ili su jednaki ($\varphi_2 = \varphi_1$) ili se razlikuju za mnogokratnik od 360^0, tj. $z_2 = z_1$, ako je

1) $r_2 = r_1$, (13)

2) $\varphi_2 = \varphi_1 + 360^0 \cdot k$, gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots$

d) Operacije s kompleksnim brojevima

1) Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva

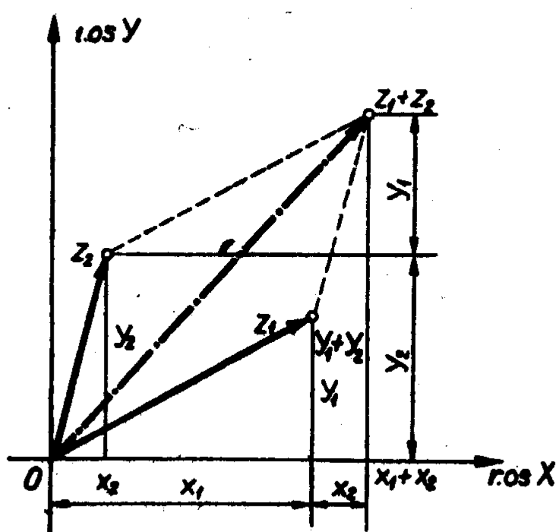
Vršimo tako, da kompleksne brojeve uzimamo u obliku $z = x + iy$ pa s njima postupamo kao s običnim binomima ili vršimo te operacije grafički prikazavši pribrojnike u obliku vektora.

Sve ostale operacije nad kompleksnim brojevima vrše se najjednostavnije tako, da se kompleksni brojevi napišu u trigonometrijskom obliku.

1. Zbrajanje kompleksnih brojeva.

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}\right\} +$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2).$$

Isto vektorski: Vidi sl. 7.



Sl. 7.

2. Oduzimanje kompleksnih brojeva.

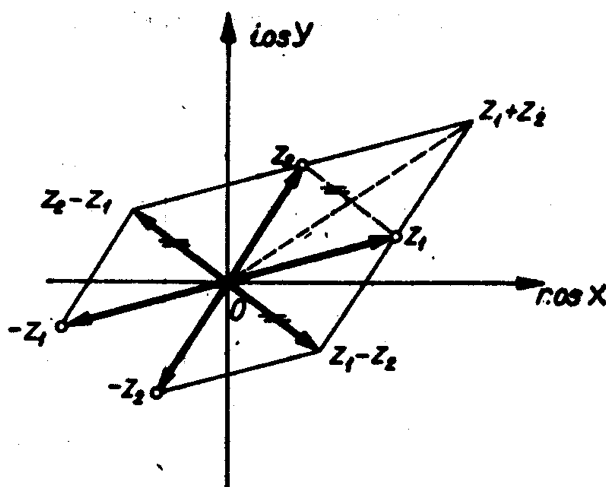
$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}\right\} -$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i (y_1 - y_2).$$

Isto vektorski:

Svedimo oduzimanje vektora na zbrajanje tako, da mjesto $z_1 - z_2$ uzmemo $z_1 + (-z_2)$, a mjesto $z_2 - z_1$ uzmemo $z_2 + (-z_1)$. (Vidi sl. 8).

Iz slike 8 slijedi, da je vektor zbroja $z_1 + z_2$ predočen po veličini i smjeru jednom, a vektor razlike $z_1 - z_2$, odnosno $z_2 - z_1$ drugom dijagonalom paralelograma kojemu su stranice zadani pribrojnici z_1 i z_2, pri čemu je vektor razlike uvijek upravljen prema minuendu (prema z_1 za $z_1 - z_2$, odnosno prema z_2 za $z_2 - z_1$).

2) Množenje kompleksnih brojeva.



Sl. 8.

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$
$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Izvršimo li množenje lijevih i desnih strana tih jednadžbi i uzmemo li kod toga u obzir, da je $i^2 = -1$ (vidi (8)) kao i goniometrijske formule (11) i (10)*), dobit ćemo:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad (14)$$

Npr.

$$z_1 = 5 (\cos 35^0 + i \sin 35^0)$$
$$z_2 = 3 (\cos 15^0 + i \sin 15^0)$$
$$z_1 \cdot z_2 = 15 (\cos 50^0 + i \sin 50^0).$$

Formula (14) vrijedi analogno za kakavgod konačni broj množitelja.

3) Potenciranje kompleksnih brojeva.

Uzmemo li da je u (14) $z_1 = z_2 = z$, pa je $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ i $r_1 = r_2 = r$, dobit ćemo kvadrat kompleksnog broja:

$$z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Na sličan način dobije se n-ta potencija kompleksnog broja

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi):$$

$$z^n = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \qquad (15).$$

Npr.

$$z = 2 (\cos 10^0 + i \sin 10^0)$$
$$z^4 = 16 (\cos 40^0 + i \sin 40^0).$$

Uzmimo poseban slučaj, da je u $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ apsolutna vrijednost $r = 1$, tj. $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Prema (15) dobijemo tada:

I. *Moivre-ovu formulu*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \qquad (16)$$

Uvrstimo li ovamo $-\varphi$ mjesto φ i uzmemo li u obzir, da je $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, a $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$, dobit ćemo:

II. *Moivre-ovu formulu*

$$(\cos \varphi - i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi - i \sin n\varphi. \qquad (16a)$$

*) Vidi Repetitorij elementarne matematike, III. Goniometrija i trigonometrija, Tehnička knjiga, V izd. Zagreb, 1960.

4) Dijeljenje kompleksnih brojeva.

Da se izračuna kvocijent kompleksnih brojeva z_1 i z_2, tj.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)},$$

pomnožimo brojnik i nazivnik desne strane s $(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)$ i uzmemo u obzir da je $i^2=-1$, kao i goniometrijske formule (2), (15) i (14)*), dobijemo:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (17)$$

Npr.

$$z_1=2(\cos 28^0+i\sin 28^0)$$
$$z_2=3(\cos 16^0+i\sin 16^0)$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{3}(\cos 12^0+i\sin 12^0)$$

5) Korjenovanje kompleksnih brojeva.

Treba izračunati $\sqrt[n]{z}$, gdje je $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Pretpostavimo da je $\sqrt[n]{z}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$ (a)
Imamo dakle odrediti ρ i ψ.

Dignemo li lijevu i desnu stranu jednakosti (a) na n-tu potenciju po formuli (15), dobit ćemo:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n[\cos(n\psi)+i\sin(n\psi)].$$

Odatle slijedi prema (13):

$$\rho^n=r, \quad \text{pa je} \quad \rho=\sqrt[n]{r}$$

i $n\psi=\varphi+360^0\cdot k$, te je $\psi=\dfrac{\varphi+360^0\cdot k}{n}$, gdje je $k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

Uvrštenje tih vrijednosti za ρ i ψ u ~~(a) daje:~~

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+360^0\cdot k}{n}+i\sin\frac{\varphi+360^0\cdot k}{n}\right) \qquad (18)$$
$$k=0,1,2,\dots,(n-1).$$

Za k uzimamo samo n vrijednosti od 0 do $n-1$, jer se za sve ostale k vrijednosti $\sqrt[n]{z}$ ponavljaju.

Prema tome $\sqrt[n]{z}$ i m a u v i j e k n r a z l i č i t i h v r i j e d n o s t i.

Iz formule (18) vidimo:

1) da sve n vrijednosti $\sqrt[n]{z}$ imaju istu apsolutnu vrijednost $\sqrt[n]{r}$, tj. istu udaljenost od ishodišta;

*) Vidi bilješku na str. 19.

2) da uzimajući za k postupno vrijednosti $1, 2, \ldots (n-1)$, povećavamo svaki put za $\frac{360^0}{n}$ argument $\frac{\varphi}{n}$, koji odgovara prvoj vrijednosti korijena i to za $k=0$.

Iz toga slijedi, da n **tačaka kompleksne ravnine, koje predočuju** n **vrijednosti** $\sqrt[n]{z}$ **leže u vrhovima pravilnog** n**-terokuta upisanog kružnici polumjera** $\sqrt[n]{r}$.

Primjer 1. Neka se izračuna $\sqrt[3]{-1}$ prikazavši vrijednosti korijena:
1) u trigonometrijskom obliku,
2) u običnom obliku,
3) grafički.

Prema formuli (18) i s obzirom na primjedbu u tački c) ovog § imamo:

$z=-1, \quad r=|-1|=1, \quad n=3, \quad \sqrt[3]{r}=\sqrt[3]{1}=1$ (samo aritmetičko značenje),
$\varphi=180^0, \quad k=0, 1, 2$, a uvrštenje u (18) daje:

$$\sqrt[3]{-1}=1\left(\cos\frac{180^0+360^0\cdot k}{3}+i\sin\frac{180^0+360^0\cdot k}{3}\right)$$

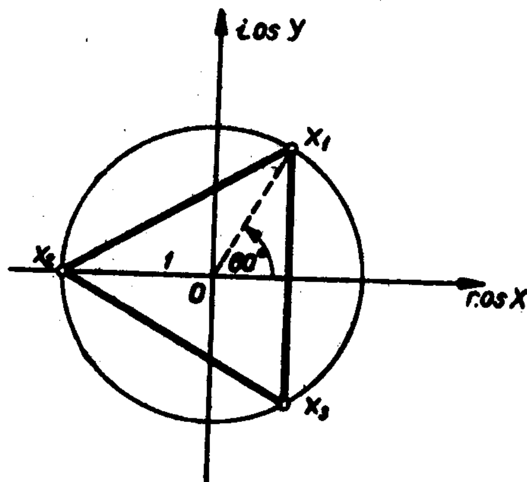
ili
$$\sqrt[3]{-1}=\cos(60^0+120^0\cdot k)+i\sin(60^0+120^0\cdot k).$$

$k=0 \qquad x_1=\cos 60^0+i\sin 60^0=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$

$k=1 \qquad x_2=\cos 180^0+i\sin 180^0=-1,$

$k=2 \qquad x_3=\cos 300^0+i\sin 300^0=\sin 30^0-i\cos 30^0=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Grafički prikaz izračunatih vrijednosti $\sqrt[n]{z}$ dobijemo tako, da opišemo iz ishodišta kao središta kružnicu polumjera $\sqrt[n]{r}$ (u našem slučaju 1) pa uz os X konstruiramo kut, koji je jednak amplitudi prve vrijednosti korijena (za naš primjer 60^0). Dobijemo x_1. Polazeći od x_1 dijelimo kružnicu u n jednakih dijelova (u našem slučaju 3) te tako određujemo položaj tačaka, koje predočuju $\sqrt[n]{z}$, u našem slučaju x_2 i x_3 (vidi sl. 9.).



Sl. 9.

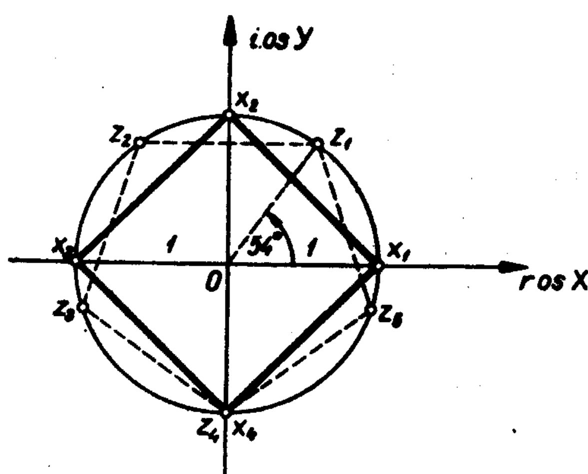
Primjer 2. Isto sa $\sqrt[4]{1}$

$z=1, \quad r=|z|=1; \quad n=4;$

$\sqrt[n]{r}=\sqrt[4]{1}=1; \quad \varphi=0^0, \quad k=0, 1, 2, 3.$

$$\sqrt[4]{1}=\cos\frac{360^0\cdot k}{4}+i\sin\frac{360^0\cdot k}{4}$$

ili
$$\sqrt[4]{1}=\cos 90^0\cdot k+i\sin 90^0\cdot k,$$



Sl. 10.

$k = 0 \quad x_1 = \cos 0° + i \sin 0° = 1,$
$k = 1 \quad x_2 = \cos 90° + i \sin 90° = i,$
$k = 2 \quad x_3 = \cos 180° + i \sin 180° = -1,$
$k = 3 \quad x_4 = \cos 270° + i \sin 270° = -i.$

Grafički prikaz korijena vidi sl. 10. (Kvadrat).

Primjer 3. $\sqrt[5]{-i} = ?$

$z = -i; \quad r = |-i| = 1; \quad n = 5:$

$\sqrt[n]{r} = \sqrt[5]{1} = 1 \; ; \quad \varphi = 270° \; ; \quad k = 0,1,2,3,4.$

$$\sqrt[5]{-i} = \cos \frac{270° + 360° \cdot k}{5} + i \sin \frac{270° + 360° \cdot k}{5},$$

ili $\sqrt[5]{-i} = \cos (54° + 72° \cdot k) + i \sin (54° + 72° \cdot k); \quad k = 0,1,2,3,4.$

$k = 0 \quad z_1 = \cos 54° + i \sin 54° = 0{,}59 + i\,0{,}81,$
$k = 1 \quad z_2 = \cos 126° + i \sin 126° = -\sin 36° + i \cos 36° = -0{,}59 + i\,0{,}81,$
$k = 2 \quad z_3 = \cos 198° + i \sin 198° = -\cos 18° - i \sin 18° = -0{,}95 - i\,0{,}31,$
$k = 3 \quad z_4 = \cos 270° + i \sin 270° = 0 + i(-1) = -i,$
$k = 4 \quad z_5 = \cos 342° + i \sin 342° = \sin 72° - i \cos 72° = 0{,}95 - i\,0{,}31.$

Grafički prikaz korijena vidi sl. 10. (Peterokut).

Izračunaj: $\sqrt[3]{1 - i}$ i prikaži grafički tri vrijednosti korijena.
[Prema (12) $z = 1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$].

Primjedba: Rješavanje binomnih algebarskih jednadžbi, tj. jednadžbi oblika $x^n + a = 0$, svodi se na računanje $\sqrt[n]{z}$:

$$x^n + a = 0,$$
$$x = \sqrt[n]{-a}. \qquad (19)$$

Primjer:

$$x^6 + 64 = 0.$$

Odatle: $x = \sqrt[6]{-64}.$

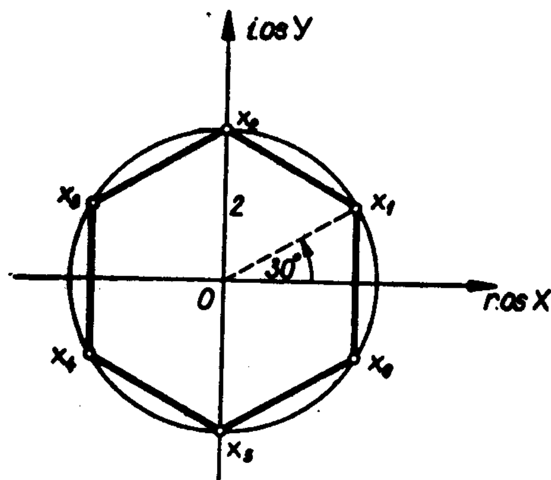
Prema formuli (18):

$z = -64; \quad r = |z| = 64; \quad n = 6;$

$\sqrt[n]{r} = \sqrt[6]{64} = 2; \quad \varphi = 180°;$

$k = 0,1,2,3,4,5.$

$$\sqrt[6]{-64} = 2 \left(\cos \frac{180° + 360° \cdot k}{6} + i \sin \frac{180° + 360° \cdot k}{6} \right)$$



Sl. 11.

ili $\sqrt{-64} = 2\,[\cos(30^0 + 60^0 \cdot k) + i \sin(30^0 + 60^0 \cdot k)]$.

$k = 0$ $\quad x_1 = 2(\cos 30^0 + i \sin 30^0) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i,$

$k = 1$ $\quad x_2 = 2(\cos 90^0 + i \sin 90^0) = 2i,$

$k = 2$ $\quad x_3 = 2(\cos 150^0 + i \sin 150^0) = 2(-\sin 60^0 + i \cos 60^0) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) =$

$$= -\sqrt{3} + i,$$

$k = 3$ $\quad x_4 = 2(\cos 210^0 + i \sin 210^0) = 2(-\cos 30^0 - i \sin 30^0) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) =$

$$= -\sqrt{3} - i,$$

$k = 4$ $\quad x_5 = 2(\cos 270^0 + i \sin 270^0) = -2i,$

$k = 5$ $\quad x_6 = 2(\cos 330^0 + i \sin 330^0) = 2(\sin 60^0 - i \cos 60^0) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) =$

$$= \sqrt{3} - i.$$

Grafički prikaz korijena vidi sl. 11.

Navedimo još jedan primjer za računanje $\sqrt[n]{z}$.

$$\sqrt[8]{1 - i\sqrt{3}} = ?$$

$$z = 1 - i\sqrt{3}$$

Prelazimo na trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

Prema (12a):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\left.\begin{matrix}\sin\varphi < 0\\ \cos\varphi > 0\end{matrix}\right\}\ \varphi \text{ je u IV kvadrantu}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = +\sqrt{3};\ \varphi_0 = 60^0$$

$$\varphi = 360^0 - 60^0 = 300^0$$

$$r = +\sqrt{1+3} = 2$$

$$z = 2(\cos 300^0 + i \sin 300^0)$$

Prema (18):

$$\sqrt[8]{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{300^0 + 360^0 \cdot k}{8} + i \sin\frac{300^0 + 360^0 \cdot k}{8}\right)$$

ili

$$\sqrt[8]{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt[8]{2}\,[\cos(37{,}5^0 + 45^0 \cdot k) + i \sin(37{,}5^0 + 45^0 \cdot k)]$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 7.$$

$k = 0 \quad z_1 = \sqrt[8]{2}(\cos 37{,}5^0 + i \sin 37{,}5^0) = 1{,}09(0{,}79 + i\,0{,}61) = 0{,}86 + i\,0{,}66.$

$k = 1 \quad z_2 = \sqrt[8]{2}(\cos 82{,}5^0 + i \sin 82{,}5^0) = 1{,}09(0{,}13 + i\,0{,}99) = 0{,}14 + i\,1{,}08.$

$k = 2 \quad z_3 = \sqrt[8]{2}(\cos 127{,}5^0 + i \sin 127{,}5^0) = 1{,}09(-0{,}61 + i\,0{,}79) = -0{,}66 + i\,0{,}86.$

$k = 3 \quad z_4 = \sqrt[8]{2}(\cos 172{,}5^0 + i \sin 172{,}5^0) = 1{,}09(-0{,}99 + i\,0{,}13) = -1{,}08 + i\,0{,}14.$

$k = 4 \quad z_5 = \sqrt[8]{2}(\cos 217{,}5^0 + i \sin 217{,}5^0) = 1{,}09(-0{,}79 - i\,0{,}61) = -0{,}86 - i\,0{,}66.$

$k = 5 \quad z_6 = \sqrt[8]{2}(\cos 262{,}5^0 + i \sin 262{,}5^0) = 1{,}09(-0{,}13 - i\,0{,}99) = -0{,}14 - i\,1{,}08.$

$k = 6 \quad z_7 = \sqrt[8]{2}(\cos 307{,}5^0 + i \sin 307{,}5^0) = 1{,}09(0{,}61 - i\,0{,}79) = 0{,}66 - i\,0{,}86.$

$k = 7 \quad z_8 = \sqrt[8]{2}(\cos 352{,}5^0 + i \sin 352{,}5^0) = 1{,}09(0{,}99 - i\,0{,}13) = 1{,}08 - i\,0{,}14.$

Prikaži grafički sve vrijednosti izračunatih korijena pa ćeš vidjeti da z_1 i z_5, z_2 i z_6, z_3 i z_7, z_4 i z_8 leže simetrično s obzirom na ishodište koordinatnog sistema.

Izračunaj na isti način sve vrijednosti $\sqrt{-3 - i\sqrt{3}}$ i prikaži ih grafički.

§ 2.

O SLJEDOVIMA I LIMESIMA

1. POJAM SLIJEDA I NJEGOVA LIMESA. KONVERGENTNI I DIVERGENTNI SLJEDOVI

Znamo već da se svaki iracionalni broj može prikazati u obliku dvaju beskonačnih sljedova racionalnih brojeva. Npr.:

$$\pi = (\underrightarrow{3, 3 \cdot 1, 3 \cdot 14, \ldots} \; ; \; \underleftarrow{\ldots 3 \cdot 15, 3 \cdot 2, 4}).$$

Ima naravno i drugih sljedova, npr.:

$1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$ slijed prirodnih brojeva,

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$ slijed recipročnih vrijednosti prirodnih brojeva, itd.

Općenito ima slijed oblik:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots,$$

gdje tačke znače, da iza svakog člana dolazi još dalje član, dakle beskonačno mnogo članova. Slijed je prema tome beskonačan niz brojeva, koji nisu međusobno vezani nikakvim računskim operacijama, jer je veza između članova slijeda čisto nutarnja, pošto su napisani po nekom zakonu. Taj zakon je često sadržan u *općem* ili *n-tom članu slijeda*, tj. u a_n, koji predstavlja čitav slijed, pa se operacije nad sljedovima svode na operacije nad njihovim općim članovima.

Prmjeri.

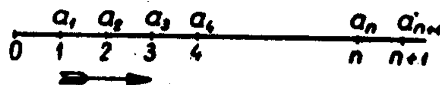
Slijed 1. $a_n = n$

Članove slijeda računamo u križaljci:

n	$a_n = n$
1	1
2	2
3	3
.	.
.	.
.	.
.	.
n	n
$n+1$	$n+1$
.	.
.	.

Slijed glasi dakle:

$1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n, n+1, \ldots$



Sl. 12.

U sl. 12 prikazan je taj slijed na brojnom pravcu.

Primjedba: Tri tačke napisane iza člana slijeda ili brojke znače, da dolazi beskonačno mnogo članova slijeda ili brojaka, dok veći broj tačaka kazuje da ih dolazi bilo kako velik, ali *konačan* broj.

Slijed 2.

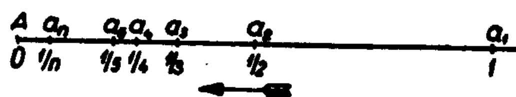
n	$a_n = \frac{1}{n}$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
.	.
.	.
.	.

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Slijed glasi:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \ldots$$

(Vidi sl. 13).



Sl. 13.

Slijed 3.

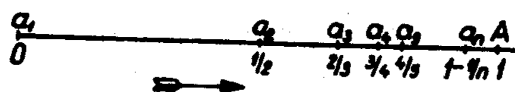
n	$a_n = 1 - \frac{1}{n}$
1	$1 - \frac{1}{1} = 0$
2	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
3	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
4	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
5	$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
.	. .
.	. .
.	. .

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Slijed glasi:

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots\ldots,\ \left(1 - \frac{1}{n}\right),\ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right),\ \ldots$$

(Vidi sl. 14).



Sl. 14.

Slijed 4.

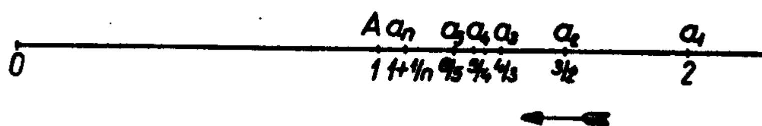
n	$a_n = 1 + \frac{1}{n}$
1	$1 + 1 = 2$
2	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
3	$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
4	$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$
5	$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$
.	.
.	.
.	.

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Slijed glasi:

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \ldots\ldots\ldots,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right),\ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right),\ \ldots$$

(Vidi sl. 15).



Sl. 15.

Za slijed 1. kažemo, da teži u beskonačnost, jer članovi toga slijeda rastu preko svake granice, i pišemo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} n = \infty.$$

To je tzv. divergentni slijed, jer članovi slijeda ne teže konačnoj određenoj granici (limesu).

Za slijed 2. kažemo, da teži ili konvergira prema 0, jer apsolutnu veličinu razlike izmedu 0 i članova slijeda možemo načiniti po volji malenom, ako idemo u slijedu dovoljno daleko, pa pišemo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

To je konvergentni slijed, jer teži određenom konačnom broju. S istog razloga su sljedovi 3. i 4. također konvergentni, jer teže broju 1, prvi slijed rastući, a drugi padajući, tj.:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Općenito limes (granicu) slijeda $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ definiramo ovako:



Sl. 16.

Slijed brojeva, kojemu je opći član a_n, ima za limes čvrsti broj A ili teži ili konvergira tom broju A, ako apsolutnu veličinu razlike između A i a_n, tj. $|A - a_n|$, možemo načiniti po volji malenom tako, da n uzmemo dovoljno velik, tj. čim idemo u slijedu dovoljno daleko.

Isto simbolički: $\lim_{n \to \infty} a_n = A$, ako je (20)

$$|A - a_n| < \varepsilon, \quad \text{čim je} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

$< \varepsilon$ znači „po volji malen",

$> n_0$ znači „dovoljno velik",

$n_0(\varepsilon)$ znači, da n_0 ovisi o unaprijed zadanom po volji malom pozitivnom broju ε.

Ako takvog broja A nema, slijed divergira.

Ustvrdili smo, npr., da slijed 3. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ima za limes $A = 1$.

Da dokažemo našu tvrdnju, pokažimo, da možemo $|A - a_n| = \left|1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n}$ načiniti po volji malenom, npr. manjom od $\varepsilon = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}$. Stavimo, dakle, $|A - a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10^4}$, pa dobijemo

$$n > 10^4, \quad \text{tj. } n_0 = 10^4.$$

To znači: počevši od 10001. člana zadanog slijeda razlika

$$|A - a_n| < \frac{1}{10^4}.$$

Sada zadajemo još manji ε, npr. $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$, i dobijemo ponovivši isti postupak, da je $|A - a_n| < \frac{1}{10^6}$, čim je $n > 10^6$, tj. $n_0 = 10^6$, itd.

Dakle: $$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Na isti način dokazujemo, da slijed 4. teži također k $A = 1$, a slijed 2. k $A = 0$, dok slijed 1. divergira.

2. LIMESI SLJEDOVA

$$a_n = |x|^n, \quad a_n = \frac{|x|^n}{n!} \quad \text{i} \quad a_n = \sqrt[n]{x}.$$

Određivanje limesa slijeda ne dâ se obično provesti na temelju definicije limesa, kako smo to npr. napravili za slijed 3. Često samo opsežna i složena diskusija vodi do cilja. Na taj način dokazujemo npr. da je:

a) $$\lim_{n \to \infty} |x|^n = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \infty \end{cases} \text{za } |x| \begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{cases}.$$

b) $$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0, \quad \text{bio } x \text{ kojigod realan broj.} \qquad (21)$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

c) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x} = 1, \quad \text{bio } x \text{ kojigod pozitivni realni broj.}$$

3. TEOREM O MONOTONIM SLJEDOVIMA. BROJ e

Drugi način određivanja limesa sljedova sastoji se u tome, da se sljedovi dijele u skupine. Jednu takvu skupinu čine *monotono rastući i monotono padajući sljedovi*, tj. sljedovi, čiji članovi uvijek rastu, odnosno uvijek padaju. Gore navedeni sljedovi 1. i 3. su monotono rastući sljedovi,

dok su 2. i 4. monotono padajući. Prema tome za slijed $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$ kaže se da monotono raste, a za slijed $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$ da monotono pada.

Članovi monotono rastućih sljedova mogu rasti preko svake granice (vidi slijed 1.), a mogu ostati iako uvijek rastu manji od nekog čvrstog broja (npr. u monotono rastućem slijedu 3. svi su članovi manji od 1). Za monotono rastuće sljedove vrijedi teorem:

Slijed, kojemu članovi monotono rastu, ali ostaju manji od nekog čvrstog broja M, ima limes, koji nije veći od M, tj. koji je manji ili najviše jednak tom čvrstom broju M.

Slično glasi teorem o monotono padajućim sljedovima.

Kako vidimo, teorem utvrđuje samo postojanje limesa slijeda, dok vrijednost tog limesa određuje samo približno ($\leq M$).

Na temelju tog teorema dokazuje se da postoji limes slijeda:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ kad } n \to \infty.$$

Najprije se dokazuju obje pretpostavke teorema:

1) da slijed $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

monotono raste, tj. da je $a_n < a_{n+1}$, ili $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

za sve n i to na taj način, da se $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ razvije po binomnom poučku da gornja nejednakost postaje očita;

2) da su svi članovi slijeda manji od 3, tj. $a_n < 3$ za sve n, što se postizava podesnim povećavanjem članova u razvoju za $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Tada se na temelju teorema zaključuje, da slijed ima limes, koji je manji ili najviše jednak 3.

Taj limes se označuje slovom e i račun, koji će se kasnije navesti (vidi Mac Laurinove redove), daje

$$e = 2{,}71828 \cdots$$

Time je dokazano postojanje broja e, koji je dakle limes slijeda $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, kad n teži u beskonačnost, tj.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828 \ldots \qquad (22)$$

4. TAČKA GOMILANJA

Tačka gomilanja je ona tačka slijeda u čijem se okolišu, ma kako malom, nalazi beskonačno mnogo tačaka slijeda. Kako se vidi iz gore navedenih primjera konvergentnih sljedova, svaka granična ili limes-tačka slijeda je svakako tačka gomilanja, ali iz toga ne slijedi, da je svaka tačka gomilanja limes-tačka, jer slijed ako ima limes ima samo jednu tačku gomilanja, koja je ujedno taj limes.

Tako je npr. slijed

$$a_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$$

ne konvergira, jer ima dvije tačke gomilanja i nema dakle granične tačke (limesa). Uvrštavajući naime za n lihe (neparne) brojeve, dobijemo:

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots,$ pa je prva tačka gomilanja 0, a uvrštavajući take (parne) brojeve, dobijemo:

$2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{8}, \ldots,$ pa je druga tačka gomilanja 2.

5. OPERACIJE S LIMESIMA

Neka su zadana dva konvergentna slijeda a_n i b_n s limesima A i B tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

a) Limes zbroja ili razlike dviju ili više promjenljivih jednak je zbroju odnosno razlici limesâ tih promjenljivih.

To znači: $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B. \qquad (23)$$

b) Limes umnoška dviju ili više promjenljivih jednak je umnošku limesâ tih promjenljivih.

To znači: $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B. \qquad (24)$$

c) Limes potencije promjenljive jednak je potenciji limesa te promjenljive.

To znači: $$\lim_{n\to\infty}(a_n)^m = (\lim_{n\to\infty} a_n)^m = A^m.$$

d) Limes kvocijenta dviju promjenljivih jednak je kvocijentu limesa tih promjenljivih. Kod toga se pretpostavlja, da je limes nazivnika različit od nule.

To znači: $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}, \qquad (26)$$

uz pretpostavku da je $B \neq 0$.

Primjedba: Dijeljenje nulom $\left(\frac{A}{0}\right)$ nema smisla, ali $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ ili općenitije

$$\lim_{x \to 0} \frac{A}{x} = +\infty, \tag{26 a}$$

ako x preko pozitivnih vrijednosti teži nuli, a

$$\lim_{x \to 0} \frac{A}{x} = -\infty, \tag{26 b}$$

ako x preko negativnih vrijednosti teži nuli.

e) Limes korijena iz promjenljive jednak je korijenu iz limesa te promienljive.

To znači: $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \to \infty} a_n} = \sqrt[m]{A}, \tag{27}$$

ukoliko korijen postoji u realnom području.

Navedimo nekoliko primjera za određivanje limesa izraza u kojem je n prirodan broj.

Primjeri.

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \underline{\frac{1}{2}}$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{n+3}{n}\right)\right] =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)\right] = 1 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{1}$, jer je $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a}{n} = \underline{0}$.

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n + 1} =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{6n^2 + 2}{2n^2 + 2} \begin{vmatrix} : 2n^2 \\ : 2n^2 \end{vmatrix} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \underline{3}.$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n} =$

Tražimo li limes kvocijenta dvaju polinoma u n kad $n \to \infty$, dijelimo brojnik i nazivnik s n^m, gdje je m najveći stepen polinoma. U našem primjeru dijelimo s n^3:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - \frac{100}{n} + \frac{1}{n^3}}{\frac{100}{n} + \frac{15}{n^2}} = \frac{1}{0} = \underline{\infty}$$

5. Riješimo na isti način:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0{,}001n^4 - 100n^3 + 1} \left|\begin{matrix} : n^4 \\ : n^4 \end{matrix}\right. = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000}{n} + \frac{3}{n^2}}{0{,}001 - \frac{100}{n} + \frac{1}{n^4}} = \frac{0}{0{,}001} = \underline{0}.$$

6. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^3 + 2n - 1}{(n+2)^3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^3 + 2n - 1}{n^3 + 6n^2 + 12n + 8}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{6}{n} + \frac{12}{n^2} + \frac{8}{n^3}}} = \sqrt[3]{1} = \underline{1}.$$

7. $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n}{n+2} - \frac{n}{2}\right) =$$

U brojniku prvog člana je aritmetički niz pa primijenimo li poznatu formulu za sumu od n članova $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$, dobit ćemo:

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(1+n)\frac{n}{2}}{n+2} - \frac{n}{2}\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2} \cdot \frac{1 + n - n - 2}{n+2}\right) = -\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{n}}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

8 $$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}.$$

9. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right]}{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]} = \underline{3}, \text{ jer } \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ i}$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ kad $n \to \infty$.

Izračunaj:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 4}{5n - n^2 - 7n^3}$ $\left[-\frac{2}{7}\right]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n+1}$ $[\,0\,]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ $[\,1\,]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$ $[\,1\,]$

§ 3.

OPĆENITO O FUNKCIJAMA

1. REALNA PROMJENLJIVA VELIČINA

Kod sljedova promjenljiva veličina n primala je samo prirodne vrijednosti $(1, 2, 3, \ldots)$. Promjenljiva veličina, koja prima s v e r e a l n e vrijednosti između dvije zadane vrijednosti a i b, tj. redom sve racionalne i iracionalne vrijednosti između a i b, zove se r e a l n a p r o m j e n l j i v a i označuje se obično posljednjim slovima abecede npr. s x. Za nju se kaže, da prolazi interval omeđen brojevima a i b.

Simbolička oznaka: $\lim x = A$ znači: $|A - x| < \varepsilon$, tj. apsolutnu veličinu razlike između A i x možemo načiniti po volji malenom.

Simbolička oznaka : $\lim x = +\infty$ znači, da x uvijek raste i može primiti ma kako veliku pozitivnu vrijednost.

Slično značenje ima $\lim x = -\infty$.

2. POJAM FUNKCIJE

Ovisi li promjenljiva veličina y o drugoj promjenljivoj veličini x tako, da je vrijednosti x dodijeljena po nekom zakonu vrijednost za y, kaže se, da je y funkcija od x.

Simbolički se piše: $y = f(x)$ ili $y = y(x)$ ili $y = g(x)$ itd.

Veličina, kojoj dajemo vrijednosti po volji, zove se n e z a v i s n a p r o m j e n l j i v a ili a r g u m e n t i označuje se obično s $x, u, t, \ldots$, a veličina, koja time dobije vrijednosti po nekom zakonu, zove se z a v i s n a p r o m j e n l j i v a ili f u n k c i j a prve i označuje se s $y, v, s \ldots$

Npr. izrazi

$$v = f(u),$$
$$v = g(u),$$
$$v = v(u),$$

predočuju tri različite funkcije v od u.

Veličina, koja u toku jednog te istog promatranja ili računa zadržava nepromjenljivo svoju vrijednost, zove se k o n s t a n t a.

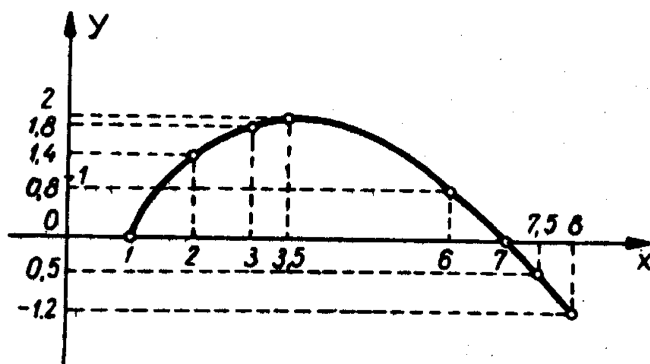
Npr. u jednadžbi pravca $y = ax + b$, a i b su konstante.

3. NAČINI KOJIMA FUNKCIJA MOŽE BITI ZADANA

Funkcija može biti zadana vrlo različito, npr.

a) u obliku tablice;

npr. u logaritamskim tablicama prikazane su vrijednosti logaritamske funkcije $y = \log x$ za izvjestan niz vrijednosti nezavisne promjenljive.



Sl. 17.

x	$y = \log x$
1	0,00000
2	0,30103
3	0,47712

itd.

b) grafički;

tj. u obliku grafa ili dijagrama. Prednost toga načina je zornost, mana je ograničena tačnost.

Npr. iz grafa u slici 17, koja predočuje neku funkciju y od x, čitamo

za	$x = 1$	$y = 0$	$x = 6$	$y = 0{,}8$
	$x = 2$	$y = 1{,}4$	$x = 7$	$y = 0$
	$x = 3$	$y = 1{,}8$	$x = 7{,}5$	$y = -0{,}5$
	$x = 3{,}5$	$y = 2{,}0$	$x = 8$	$y = -1{,}2$

c) riječima;

npr. za sve racionalne vrijednosti argumenta funkcija je jednaka 1, a za sve iracionalne vrijednosti jednaka je 2.

d) analitičkim izrazom;

npr.

$$y = \frac{1}{2}x - 1,$$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

$$p = \frac{k}{v}.$$

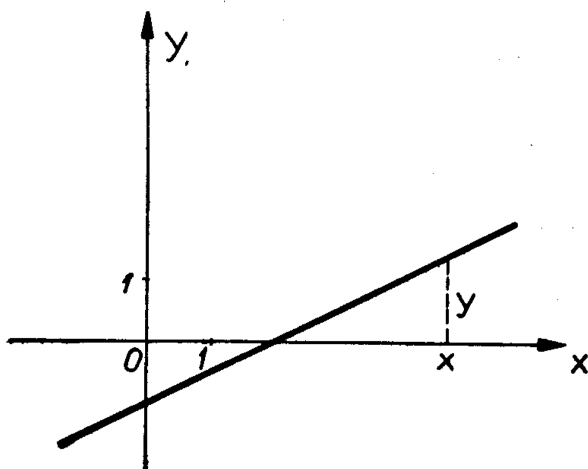
(Boyle-Mariotteov zakon za tlak p i volumen v idealna plina).

4. INTERVAL DEFINICIJE FUNKCIJE

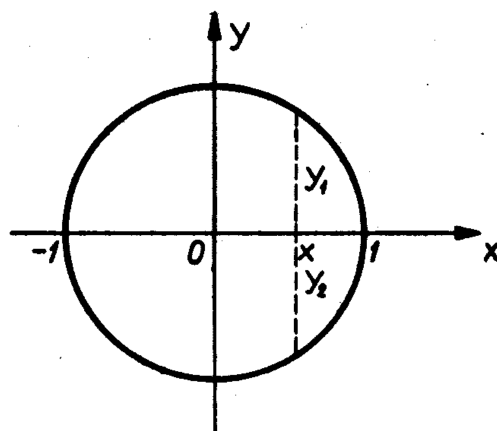
Kod svih načina prikazivanja funkcije argument x možemo kadšto mijenjati neograničeno, a kadšto samo u određenim granicama.

Primjer 1. $$y = \frac{1}{2}x - 1,$$

x možemo mijenjati od $-\infty$ do $+\infty$, jer svaku vrijednost argumenta x možemo raspoloviti pa oduzeti 1, a to se vidi iz grafa funkcije (sl. 18).



Sl. 18.



Sl. 19.

U tom slučaju kažemo, da je funkcija definirana za sve realne vrijednosti x od $-\infty$ do $+\infty$, tj. za $-\infty < x < +\infty$ ili za $|x| < \infty$.

Primjer 2. $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

U ovom slučaju vrijednosti za x možemo uzimati samo iz intervala od -1 do $+1$ uključivši granice, jer bismo za svaku vrijednost veću od $+1$ i manju od -1 dobili za y·imaginarnu vrijednost (vidi sl. 19).

U tom slučaju kažemo, da je funkcija definirana u intervalu od -1 do $+1$ uključivši granice ili kraće, u zatvorenom intervalu od -1 do $+1$, tj. za $-1 \leqq x \leqq +1$ ili za $|x| \leqq 1$.

Ako su granice intervala isključene, kaže se, da je funkcija definirana u otvorenom intervalu, npr. od a do b, tj, za $a < x < b$, a isključimo li samo jednu granicu, npr. a, funkcija je definirana u poluzatvorenom ili poluotvorenom intervalu, tj. za $a < x \leqq b$.

Općenito:

Interval definicije funkcije je zatvoren ako je $a \leqq x \leqq b$; otvoren ako je $a < x < b$; poluotvoren ako je $a \leqq x < b$ ili $a < x \leqq b$.

Geometrijski predočen je zatvoren interval dužinom ab na osi X, otvoren interval — istim dijelom osi X, kome tamo ne pripadaju tačke a i b.

Oznaka:

Zatvoren interval:	$[a, b]$,	Poluzatvoren interval:	$[a, b)$,
Otvoren interval:	(a, b),	odnosno:	$(a, b]$,

5. JEDNOZNAČNE I VIŠEZNAČNE, EKSPLICITNE I IMPLICITNE FUNKCIJE

a) Funkcija je **jednoznačna** kad jednoj vrijednosti argumenta x odgovara samo jedna vrijednost funkcije y; funkcija je **višeznačna** kad jednoj vrijednosti argumenta x odgovara više vrijednosti funkcije y.

Grafički se jednoznačnost, odnosno višeznačnost funkcije iskazuje u tome, da pravac usporedan s osi Y siječe graf tj. sliku jednoznačne funkcije u jednoj tački, dvoznačne u dvije tačke itd.

Npr. funkcija $y = \frac{1}{2}x - 1$ (vidi sl. 18) jednoznačna je dok je funkcija $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ (vidi sl. 19) dvoznačna.

b) Funkcija može biti zadana eksplicitno ili implicitno.

Funkcija je zadana **eksplicitno**, ako je analitički izraz, kojim je funkcija zadana, riješen po funkciji.

Npr. $y = \frac{1}{2}x - 1, \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Općenito ima eksplicitno zadana funkcija oblik

$$y = f(x) \quad \text{ili} \quad y = y(x) \quad \text{itd.}$$

Funkcija je zadana **implicitno**, ako je analitički izraz, kojim je funkcija zadana, prenesen na lijevu stranu tako, da je na desnoj strani 0.

Npr. $x - 2y - 2 = 0$: $\quad x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Općenito ima implicitno zadana funkcija oblik:

$$F(x, y) = 0.$$

Funkcija $y = y(x)$ uvrštena u $F(x, y) = 0$ zadovoljava tu jednadžbu identički, tj. za svaki x:

$$F[x, y(x)] \equiv 0.$$

Npr. $3x - y + 5 = 0$, odatle $y = 3x + 5$.

Uvrštenje daje:

$$3x - (3x + 5) + 5 = 3x - 3x - 5 + 5 \equiv 0.$$

Znak „$\equiv$" znači: „identički jednak".

Riješimo li po funkciji izraz, kojim je zadana implicitna funkcija, dobit ćemo istu funkciju u eksplicitnom obliku.

Npr. iz $x - 2y - 2 = 0$ slijedi $y = \frac{1}{2}x - 1$, a iz

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ slijedi $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Primijetimo da nije uvijek moguće implicitno zadanu funkciju prikazati u eksplicitnom obliku.

U simboličkim izrazima za funkciju kao $y = f(x)$, $y = y(x)$ itd. slovo f odnosno drugi y znači onaj kompleks operacija koji treba izvršiti nad x da se dobije y.

Npr. u $y = x^2 = f(x)$ f znači kvadriranje,

u $y = \frac{1}{x} = f(x)$ f znači recipročna vrijednost itd

Oznaka y ili $y(x)$ znači dakle vrijednost funkcije y za neku vrijednost argumenta x, npr. $y = \frac{1}{2}x - 1$ ili $y(x) = \frac{1}{2}x - 1$ znači da je npr. za $x = 0$, $y = -1$; za $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$ itd., dok $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)$ itd. znači vrijednost funkcije y za neku određenu vrijednost $x_1, x_2, x_3, \cdots$ argumenta x, npr. $y(x_1) = \frac{1}{2}x_1 - 1$ ili $y(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$.

6. JEDNADŽBA FUNKCIJE U POLARNIM KOORDINATAMA

Analitički izrazi, kojima se zadaju funkcije, mogu biti dani ne samo u pravokutnim, već i u polarnim koordinatama, jer su ti izrazi za neke funkcije mnogo jednostavniji u polarnim nego u pravokutnim koordinatama.

Npr. $$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

je opća jednadžba presjeka stošca u polarnim koordinatama.

Općenito ima analitički izraz funkcije u polarnim koordinatama oblik:

$$r = r(\varphi),$$

tj. radijvektor r je zadan kao funkcija polarnog kuta φ. (Vidi. Rep. elem. matematike, IV, § 1,2 i § 12,4).

7. GRAFIČKO PREDOČIVANJE FUNKCIJA

Proučavanje funkcija znatno se olakšava njihovim grafičkim predočivanjem. Jedan pogled na graf kaže već o općem toku funkcije.

Graf je slika zakona kojim je zadana funkcija, a analitički izraz funkcije, ako postoji, zove se jednadžba grafa. Osnovna misao je dakle ista kao u analitičkoj geometriji. Razlika je samo u tome, da se u analitičkoj geometriji uzimaju iste jedinice na osi X i Y da se ne izobliče krivulje

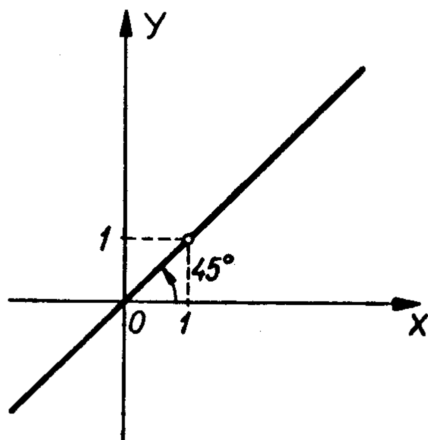
koje se proučavaju. U višoj matematici ne može se obično izići na kraj s istim mjerilom na obim koordinatnim osima, već se moraju uzimati različite jedinice na osi X i na osi Y. Time se naravno grafovi funkcija izobliče, ali odnos mjernih brojeva ostaje isti.

Pokažimo na primjerima utjecaj izbora jedinica na grafove funkcija.

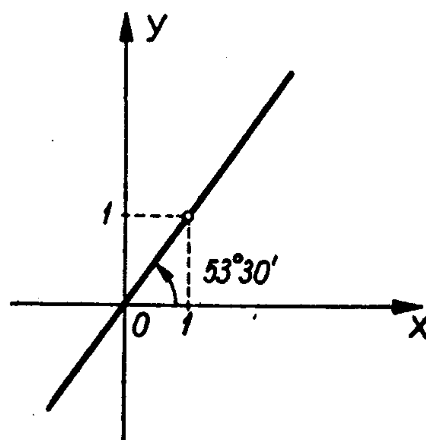
Primjer 1.

$$y = x.$$

Iste jedinice



Različite jedinice

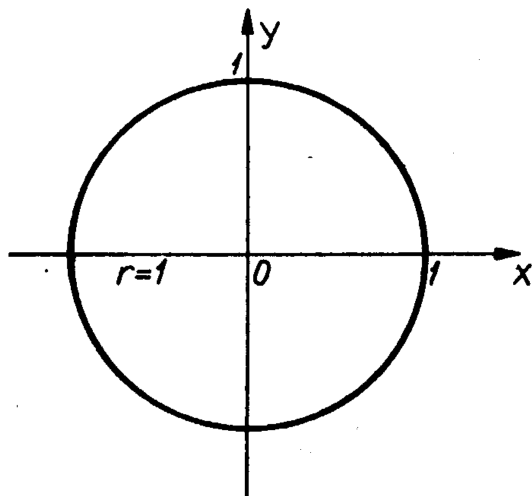


Sl. 20.

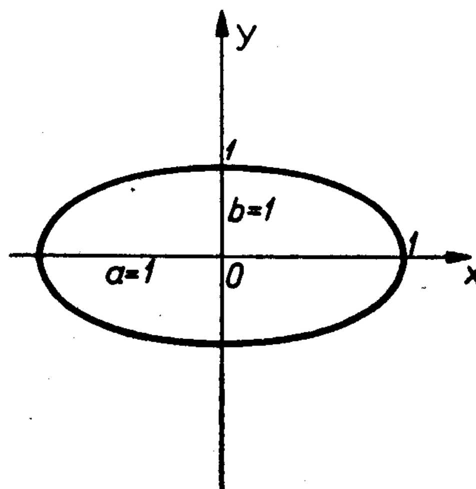
Primjer 2.

$$x = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Iste jedinice



Različite jedinice



Sl. 21.

Grafovi nacrtani s istim jedinicama ili s različitim jedinicama predočuju i s t u funkcijsku vezu, premda imaju geometrijski različit oblik.

§ 4.

POJEDINE ELEMENTARNE FUNKCIJE

1. CIJELE RACIONALNE FUNKCIJE ILI POLINOMI

a) Definicija

Te funkcije su sastavljene iz konstanata i argumenta x konačnim brojem zbrajanja, oduzimanja i množenja. Dijeljenje s x nije dopušteno, tj. x ne smije biti u nazivniku, stoga se funkcija zove „cijela".

Funkcija se zove još „racionalna", jer x ne smije biti pod korijenom.

Stepen cijele racionalne funkcije ili polinoma je stepen onog člana funkcije, koji sadrži x u najvišoj potenciji. Prema tome je npr.

$$y = \frac{3}{5}x^5 - \sqrt{3}x^3 - 2x + 8$$

polinom 5. stepena, pa ga simbolički bilježimo s $P_5(x)$:

$$P_5(x) = \frac{3}{5}x^5 - \sqrt{3}x^3 - 2x + 8.$$

Općenito ima polinom n-tog stepena oblik:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (28)$$

Koeficijenti $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ zadane su realne konstante, a x je nezavisna promjenljiva, koja se mijenja od $-\infty$ do $+\infty$.

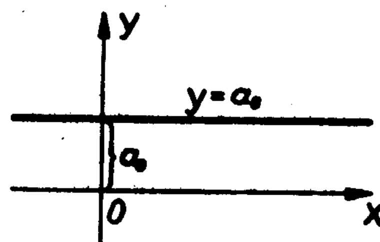
b) Pojedini slučajevi polinoma

Promotrimo pojedine slučajeve polinoma mijenjajući njegov stepen n.

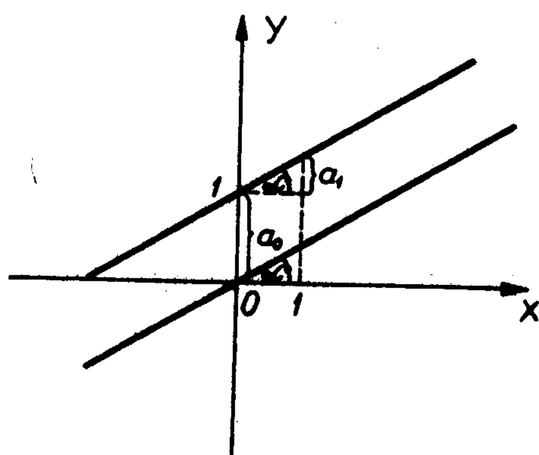
1) $n = 0$, tj. najviši član polinoma sadrži x u nultom stepenu, a kako je $x^0 = 1$ dobijemo prema (28):

$$P_0(x) = a_0, \qquad (29)$$

Polinom nultog stepena je dakle konstanta. Njegov graf je pravac usporedan s osi X i udaljen od nje za a_0, (vidi sl. 22).



Sl. 22.



Sl. 23.

2) $n = 1$, tj. najviši član polinoma sadrži x u prvom stepenu. Prema (28): $P_1(x) = a_1x + a_0$. (30)

To je polinom prvog stepena ili linearna funkcija.

Znamo da je graf $P_1(x)$ pravac, kojemu je gradijent ili koeficijent smjera $\operatorname{tg} \alpha = a_1$, a odsječak na osi Y je a_0. Znamo također konstruirati taj pravac (vidi sl. 23).

Gradijent: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1}{1} = a_1$

Odsječak na osi $Y : a_0$.

U posebnom slučaju, kad je $a_0 = 0$, linearna funkcija prima oblik

$$y = a_1 x. \qquad (30a)$$

Grafički to je pravac kroz ishodište (vidi sl. 23). (Potanko o pravcu vidi Repet. elem. matematike).

Linearna funkcija je praktički jedna od najvažnijih funkcija i to iz slijedećih razloga:

Dađemo li apscisi x neke tačke T linearne funkcije $y = a_1 x + a_0$ neki prirast po volji Δx, tj. pređemo li od tačke T na tačku T_1, kojoj je apscisa $x + \Delta x$ (vidi sl. 24), tada će ordinata funkcije prirasti za Δy, pri čemu je

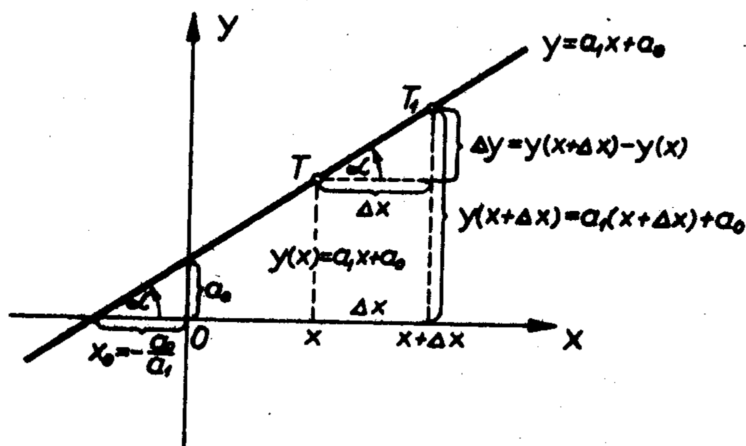
$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a_1(x + \Delta x) + a_0 - (a_1x + a_0),$$

a odatle je

$$\Delta y = a_1 \Delta x$$

ili

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a_1 = \text{konstanta} = \operatorname{tg} \alpha = \text{gradijent pravca.} \qquad (31)$$



Sl. 24.

To znači: prirast linearne funkcije Δy upravno je razmjeran s prirastom argumenta Δx, pri čemu je gradijent a_1 faktor razmjernosti ili proporcionaliteta. Stoga se linearna funkcija zove također funkcija upravne razmjernosti, napose je razmjernost dviju veličina izražena s $y = a_1 x$.

Mijenja li se, prema tome neka funkcija u nekom intervalu tako, da je prirast funkcije razmjeran s prirastom argumenta ili da je omjer prirasta funkcije i prirasta argumenta stalan, kaže se da se funkcija u tom intervalu mijenja linearno, tj. grafički po pravcu, kojemu je gradijent jednak vrijednosti toga omjera.

Kao primjer navedimo logaritamsku funkciju $y = \log x$. Iz logaritamskih tablica vadimo npr.:

$$\log 7398 = 3{,}86911$$
$$\log 7399 = 3{,}86917$$
$$\log 7400 = 3{,}86923$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\log 7404 = 3{,}86947$$
$$\log 7405 = 3{,}86953.$$

Vidimo, da se u intervalu od $x = 7398$ do $x = 7405$ logaritamska funkcija mijenja lineramo, tj. po pravcu, jer prirastu argumenta $x = 1$ odgovara uvijek isti prirast funkcije $y = 0{,}00006$. U granicama tačnosti, koju daju logaritamske tablice od 5 decimala, možemo, dakle, u dotičnom intervalu logaritamsku funkciju predočiti pravcem gradijenta

$$a_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}00006}{1} = 0{,}00006.$$

Iz toga slijedi, da u svim tim slučajevima, kada su tablične razlike stalne (u našem je primjeru stalna tablična razlika 0,00006), možemo provesti linearnu interpolaciju, tj. onu običnu interpolaciju, koju npr. vršimo pri upotrebi logaritamskih tablica.

Tako npr. za $\log 7398{,}7$ linearna interpolacija daje

$$\frac{0{,}00006}{1} \cdot 0{,}7 = 0{,}000042 \doteq 0{,}00004,$$

pa je $\log 7398{,}7 = 3{,}86911 + 0{,}00004 = 3{,}86915$. (Potanko o interpolaciji vidi § 22).

Nultačka funkcije

Općenito pod nultačkama funkcije razumijevaju se one vrijednosti argumenta, za koje je funkcija jednaka nuli.

Uzmemo li, dakle, da je linearna funkcija $y = a_1 x + a_0$ jednaka nuli, tj. stavimo li $y = 0$, dobijemo $a_1 x + a_0 = 0$, a odatle je

$$x_0 = -\frac{a_0}{a_1} = \text{nultačka linearne funkcije.}$$

Iz slike 24 vidimo, da u nultački graf funkcije siječe os X.

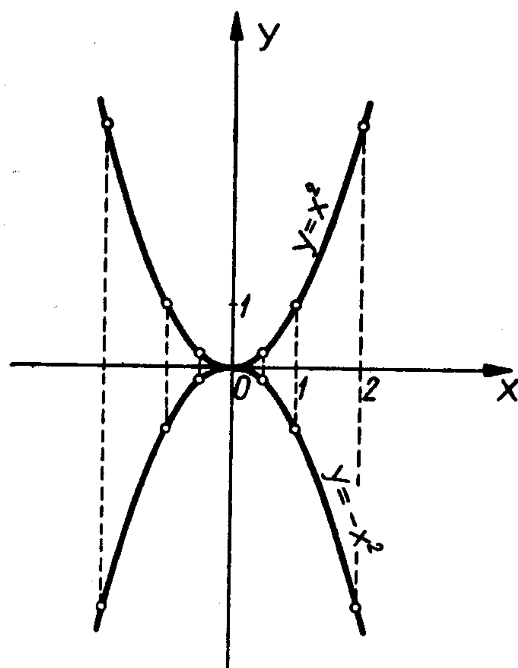
3) $n = 2$. Prema (28):

$$y = P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \qquad (32)$$

To je polinom drugog stepena ili kvadratna funkcija. Posebni slučajevi.

1. Neka je $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 0$,

Kvadratna funkcija tada glasi: $y = x^2$.



Sl. 25.

Izračunajmo nekoliko vrijednosti funkcije:

x	$y = x^2$.
0	0
$\pm\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{16}$
$\pm\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$
± 1	$+ 1$
± 2	$+ 4$

Iz slike 25 vidimo, da je graf funkcije parabola, kojoj je os simetrije os Y, a vrh joj leži u ishodištu koordinatnog sustava $O\,(0, 0)$. Iz gornje tablice slijedi, da funkcija $y = x^2$ prima za $+x$ i za $-x$ iste vrijednosti, tj.

$$y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(+x),$$

a iz slike 25 vidimo, da je graf te funkcije simetričan obzirom na os Y.

Uopće, funkcija, koja s promjenom predznaka argumenta ne mijenja niti svoj predznak, niti svoju apsolutnu vrijednost, zove se taka (parna) funkcija. Graf take funkcije simetričan je s obzirom na os Y.

Prema tome je

$$y(-x) = y(x) \qquad (33)$$

karakteristika take funkcije.

Nultačke: $y = 0$; $x^2 = 0$ ili $x \cdot x = 0$, odatle

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{dvostruka nultačka.}$$

Funkcija $y = x^2$ ima u ishodištu dvostruku nultačku. Iz slike 25 vidimo, da u dvostrukoj nultački graf funkcije dira os. X.

2. Uvrstimo li u (32):

$$a_2 = -1; \quad a_1 = 0; \quad a_0 = 0,$$

dobijemo

$$y = -x^2.$$

Graf te kvadratne funkcije opet je parabola slična prvoj, ali je otvorena prema dolje (vidi sl. 25), jer je $-x^2$ negativan za sve x. Kako u izrazu za kvadratnu funkciju $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ prvi član $a_2 x^2$ uvijek nadmašuje za veliki $|x|$ ostala dva člana, može se kazati općenito: ako je u kvadratnoj funkciji član s x^2 negativan, parabola je otvorena prema dolje.

3. Za $a_2 \neq 1$, $a_1 = 0$ jednadžba (32) glasi:

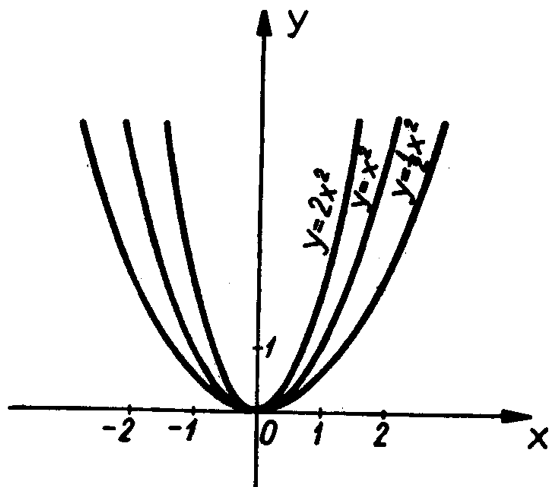
$$y = a_2 x^2.$$

Graf je opet parabola, koja se dobiva iz pređašnje tako, da se svaka ordinata parabole $y = x^2$ pomnoži s a_2. Slika 26 prikazuje parabole $y = a_2 x^2$ za $a_2 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}$ i za $a_2 = 1$.

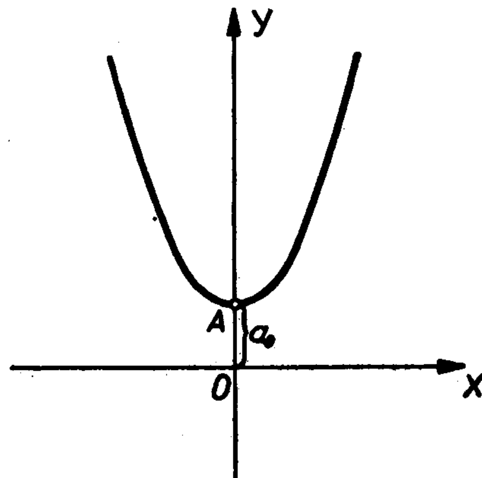
Iz slike vidimo, da za $a_2 > 1$ parabola postaje uža, a za $a_2 < 1$ postaje šira, dok je vrh u $O(0,0)$.

4. Za $a_1 = 0$ jednadžba (32) glasi:

$$y = a_2 x^2 + a_0.$$



Sl. 26.



Sl. 27.

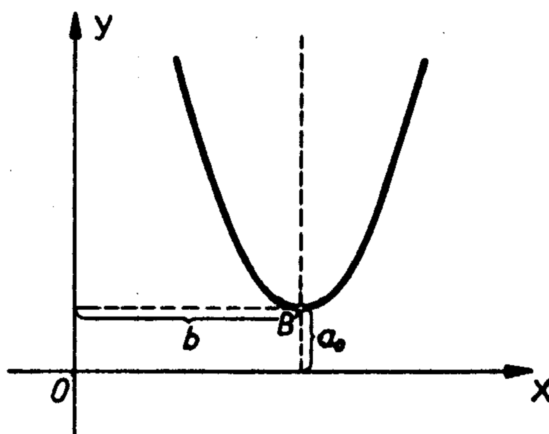
Svaka ordinata parabole $y = a_2 x^2$ povećana je za a_0; grafički to znači, da je parabola $y = a_2 x^2$ pomaknuta uzduž osi Y za a_0 i to za $a_0 > 0$ prema gore, a za $a_0 < 0$ prema dolje.

Parabola ima vrh u tački $A(0, a_0)$, (vidi sl. 27).

5. Uzmimo sada kvadratnu funkciju u obliku

$$y = a_2(x - b)^2 + a_0,$$

koji se dobije iz prеđašnjeg tako, da se od x oduzme veličina b. Grafički to znači, da je parabola prikazana na sl. 27 pomaknuta za b na desno, dok bi za $(x + b)$ pomak bio na lijevo, a vrh joj je u tački B s koordinatama $x = b$, $y = a_0$ (vidi sl. 28).



Sl. 28.

Prema tome graf kvadratne funkcije oblika

$$y = a_2(x - b)^2 + a_0$$

jest parabola, kojoj je os simetrije usporedna s osi Y, a vrh joj je u tački s koordinatama $x_v = b$; $y_v = a_0$.

6. Sada možemo prijeći na opću kvadratnu funkciju

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Izlučimo koeficijent od x^2:

$$y = a_2\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}\right),$$

nadopunimo prva 2 člana i to $x^2 + \frac{a_1}{a_2}x$ na potpuni kvadrat. To nadopunjavanje vrši se prema formuli:

$$x^2 \pm px \pm q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q. \tag{34}$$

Dobijemo:

$$y = a_2\left[\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2^2} + \frac{a_0}{a_2}\right] \quad \text{ili}$$

$$y = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2 - 4a_2 a_0}{4a_2}$$

(Vidi malo dalje primjere).

Iz usporedbe toga oblika s prеđašnjim $y = a_2(x - b)^2 + a_0$ slijedi, da je graf opće kvadratne funkcije $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ parabola, kojoj je os simetrije okomita na osi X i kojoj su koordinate vrha:

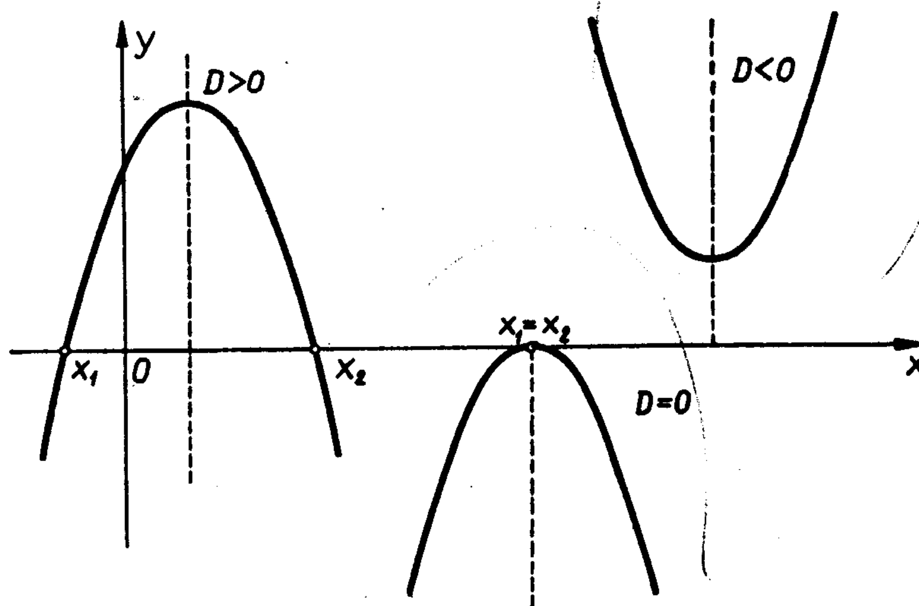
$$x_v = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad y_v = -\frac{a_1^2 - 4a_2 a_0}{4a_2}.$$

Nultačke. Stavimo $y = 0$, odnosno $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ i riješimo tu kvadratnu jednadžbu. Dobijemo obje nultačke kvadratne funkcije:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}.$$

(Vidi Rep. element. matematike, I, § 11, 3.).

Prema tome, da li je diskriminanta $D = a_1^2 - 4a_2 a_0 \gtreqless 0$, kvadratna funkcija ima ili dvije različite realne nultačke ili jednu dvostruku realnu nultačku ili nema realnih nultačaka (vidi sl. 29).



Sl. 29

Primjeri.

Neka se narišu grafovi kvadratnih funkcija $y = 3x^2 - 2x - 1$ i $y = 1 - x - 2x^2$ prethodno izračunavši koordinate vrhova i nultačke.

$$\underline{y = 3x^2 - 2x - 1}$$

$$y = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$$

Prema (34):

$$y = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right]$$

$$y = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right]$$

$$y = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right]$$

$$y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}.$$

Vrh $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

$y = 0, \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0.$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \text{nultačke}$$

Pokus:

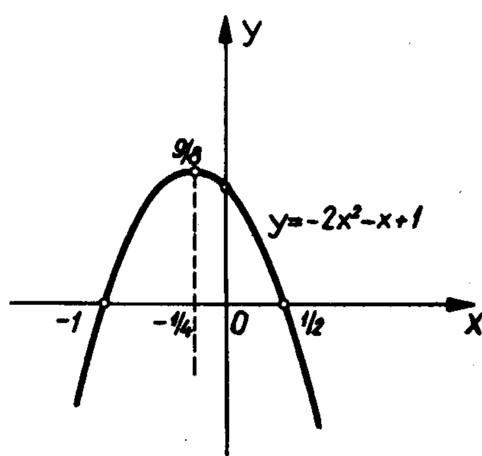
$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

Stavimo $x = 0$

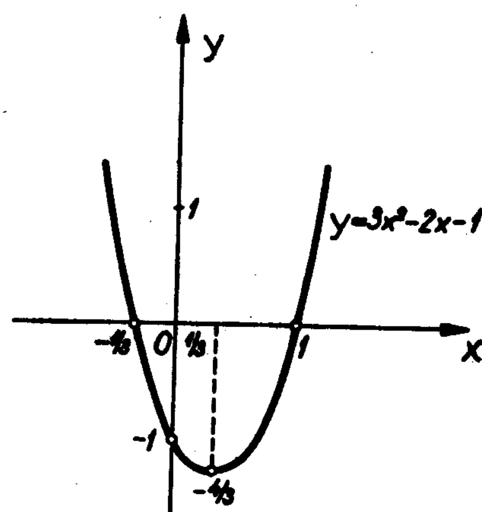
$x(0) = -1.$ Vidi sl. 30a.

$\underline{y = 1 - x - 2x^2}$

$$y = -2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$$



Sl. 30b.



Sl. 30a.

Prema (34):

$$x = -2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right]$$

$$y = -2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right]$$

$$y = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}.$$

Vrh $\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right).$

$y = 0, \quad 1 - x - 2x^2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{nultačke.}$$

Pokus:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Stavimo $x = 0$

$y(0) = 1.$ Vidi sl. 30b.

4) $n = 3$.

Prema (28) imamo:

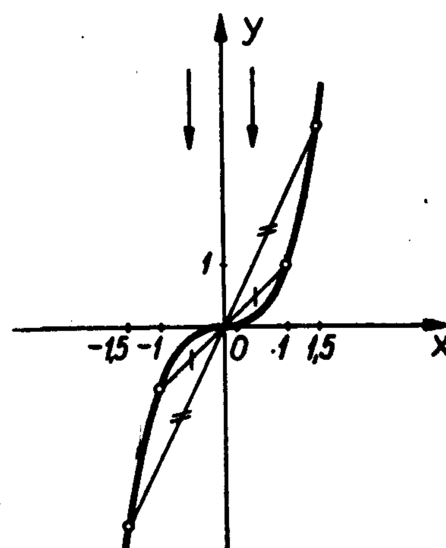
$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ — opća kubna funkcija.

Graf te funkcije mijenja na izvjestan način svoj oblik prema vrijednosti koeficijenata, a zove se kubna parabola u širem smislu.

Promotrimo samo poseban slučaj kubne funkcije, tj. kubnu parabolu u užem smislu, koja se obično misli, kad se govori o kubnoj paraboli:

$$y = x^3$$

x	y
0	0
$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{64} \doteq 0{,}016.$
$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{8} = 0{,}125.$
± 1	$\pm 1.$
$\pm\frac{3}{2}$	$\pm\frac{27}{8} \doteq 3{,}4.$



Sl. 31.

Iz tablice i iz grafa funkcije (sl. 31) vidimo, da s promjenom predznaka argumenta x funkcija mijenja samo svoj predznak, tj.

$$y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x).$$

Općenito je $$y(-x) = -y(x) \quad (35)$$

karakteristika lihe (neparne) funkcije.

L i h o m   f u n k c i j o m zovemo dakle funkciju, koja s promjenom x na $-x$ ne mijenja svoje apsolutne vrijednosti, ali mijenja predznak.

Graf lihe funkcije simetričan je na ishodište koordinantnog sustava (vidi sl. 31).

Nultačke: $y = 0$ ili $x^3 = 0$ ili $x \cdot x \cdot x = 0$, a odatle

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{array}\right| \quad x = 0 \text{ je dakle trostruka nultačka funkcije.}$$

Kako se vidi iz slike 31 u trostrukoj nultački graf funkcije dira i siječe os X. To je t a č k a   i n f l e k s i j e (obratište, prevojna tačka), a tangenta u tački infleksije zove se infleksiona tangenta. U tački infleksije prelazi konveksni dio funkcije u konkavni ili obratno, a infleksiona tangenta dira i siječe graf funkcije. Za naš je slučaj os X infleksiona tangenta u ishodištu, gdje konveksni dio kubne parabole prelazi u konkavni dio (gledaj odozgo prema dolje u smjeru strjelica!).

Gledajući na graf funkcije (sl. 31), možemo lako dati njen opis: $y = x^3$ je jednoznačna liha funkcija definirana za sve x. Funkcija raste od $-\infty$ do $+\infty$, kad x raste od $-\infty$ do $+\infty$. Za $x = 0$ ima funkcija trostruku nultačku, odnosno tačku infleksije s osi X kao infleksionom tangentom.

5) $n = 4$.

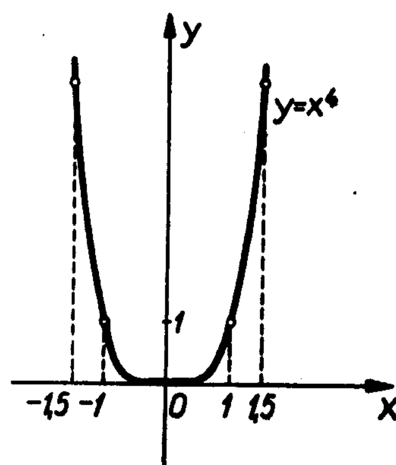
Prema (28) imamo:

$P_4(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Graf je parabola 4. stepena u širem smislu.

Poseban slučaj: $y = x^4$.

x	y
0	0
$\pm\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{256} = 0{,}004$
$\pm\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{16} = 0{,}0625$
± 1	$+1$
$\pm\frac{3}{2}$	$+\frac{81}{16} = 5{,}1.$



Sl. 32.

Kako je $y(-x) = (-x)^4 = x^4 = y(x)$, funkcija je tăka.
Nultačke: $y = x^4 = 0$ ili $x \cdot x \cdot x \cdot x = 0$, a odatle je

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$

$x = 0$ je četverostruka nultačka funkcije.

U četverostrukoj nultački graf funkcije široko dira os X (vidi sl. 32). Prema toj slici dajemo opis funkcije: $y = x^4$ je jednoznačna taka funkcija definirana za sve x. Funkcija pada od $+\infty$ do 0, kad x raste od $-\infty$ do 0, a dalje raste od 0 do $+\infty$, kad x raste od 0 do $+\infty$. $x = 0$ je četverostruka nultačka funkcije.

c) Polinom n-tog stepena

Sada možemo preći na polinom n-tog stepena:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

1) Rastavljanje polinoma na množitelje (faktore)

Vrši se na temelju osnovnog teorema algebre (Gauss): Svaki polinom ima bar jednu nultačku realnu ili kompleksnu.

Kvadratnu funkciju $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, odnosno kvadratnu jednadžbu $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ znamo rastaviti u množitelje (vidi Rep. element. matematike, I, § 11, 3):

$$y = a_2 (x - x_1)(x - x_2),$$

gdje su x_1 i x_2 nultačke kvadratne funkcije.

Primjeri.

$$1.\ y = 1 - x - 2x^2$$

$$y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1).$$

Tu su $+\frac{1}{2}$ i -1 nultačke kvadratne funkcije ili korijeni jednadžbe $1 - x - 2x^2 = 0$

$$2.\ y = \frac{x^2}{3} - x + \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \text{ ili } y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2.$$

$x_{1,2} = \frac{3}{2}$ je dvostruka nultačka.

$$3.\ y = x^2 + 4x + 13.$$

Kako su nultačke konjugirano kompleksne $x_{1,2} = -2 \pm 3i$, funkciju ne možemo rastaviti u realne množitelje.

Slično kao kod kvadratne funkcije vrši se i rastavljanje polinoma $P_n(x)$ u množitelje, pri čemu se razlikuju tri slučaja:

1. Polinom ima samo realne različite nultačke: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Tada polinom, budući rastavljen u množitelje, ima oblik:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

2. Polinom ima samo realne nultačke, ali ima i višestrukih. Neka su nultačke polinoma $P_n(x)$:

x_a realna nultačka mnogostrukosti a

x_b " " " b

. . . .

. . . .

x_g " " " g.

Tada je $\quad P_n(x) = a_n (x - x_a)^a (x - x_b)^b \ldots (x - x_g)^g,$

pri čemu je $\quad a + b + \ldots + g = n.$

3. Najopćenitiji slučaj: polinom ima realne i kompleksne nultačke različite mnogostrukosti.

Primjedbe:

1) Ako su koeficijenti polinoma realni, kompleksne nultačke dolaze uvijek u parovima, kao konjugirano kompleksne, tj. ako je $a + bi$ jedna nultačka polinoma, bit će $a - bi$ druga nultačka toga polinoma.

2) Umnožak linearnih množitelja, koji potječu od konjugirano kompleksnih nultačaka polinoma, kvadratna je funkcija s realnim koeficijentima.

Pokažimo to:

$$[x-(a+bi)]\,[x-(a-bi)] = x^2 - ax - bix - ax + a^2 + bia + xbi - abi + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2+b^2) = x^2 + \alpha x + \beta,$$

gdje su $\alpha = -2a$ i $\beta = a^2 + b^2$ realni koeficijenti ($i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$).

Primjer.

Za $x_{1,2} = -2 \pm 3i$ dobijemo: $[x-(-2+3i)]\,[x-(-2-3i)] = (x+2-3i)(x+2+3i) = x^2 + 2x - 3ix + 2x + 4 - 6i + 3ix + 6i + 9 = x^2 + 4x + 13$ (vidi gore primjer 3.).

3) I parovi konjugirano kompleksnih nultačaka polinoma mogu biti višestruki.

Neka su nultačke polinoma $P_n(x)$:

x_a realna nultačka mnogostrukosti a
x_b „ „ „ b
. . . .
. . . .
x_g „ „ „ g

x_k par konjug. kompl. nultačaka mnogostrukosti k
x_l „ „ „ „ „ l
. . . .
. . . .
x_p „ „ „ „ „ p

Tada je

$$P_n(x) = (x-x_a)^a (x-x_b)^b \ldots\ldots (x-x_g)^g (x^2+\alpha_k x+\beta_k)^k \cdot (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^l \ldots\ldots (x^2+\alpha_p x+\beta_p)^p,$$

pri čemu je $a+b+\ldots\ldots+g+2k+2l+\ldots\ldots+2p=n$.

Primjer.

Neka se rastavi u faktore polinom $P_{18}(x)$, kojemu je -8 koeficijent najvišeg člana (a_{18}), a nultačke su

$x = 0$ dvostruka	2
$x = -7$ jednostruka	1
$x = +3$ trostruka	3
$x = -2 \pm 3i$ jednostruki par	2
$x = 1 \pm i$ dvostruki par	$2 \cdot 2 = 4$
$x = 3 \pm 5i$ trostruki par	$2 \cdot 3 = 6$
	$n = 18$

$[x-(-2+3i)][x-(-2-3i)]=x^2+4x+13$ (vidi gore).

$[x-(1+i)][x-(1-i)]=x^2-2x+2.$

$[x-(3+5i)][x-(3-5i)]=x^2-6x+34.$

$P_{18}(x)=-8x^2(x+7)(x-3)^3(x^2+4x+13)(x^2-2x+2)^2(x^2-6x+34)^3.$

Iz rastavljanja polinoma u faktore se vidi da polinom n-tog stepena ima uvijek n nultačaka realnih ili kompleksnih, ako ih brojimo prema njihovoj mnogostrukosti.

Iz toga slijedi dalje, da bi polinom n-tog stepena, koji bi imao više od n nultačaka, bio identički jednak nuli $P_n(x)\equiv 0$, tj. jednak nuli za svaki x. Drugim riječima to ne bi bio polinom, već nula drukčije pisana.

Npr. $P_1(x)=(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\equiv 0$, jer su nultačke $x_1=a$, $x_2=b$ i $x_3=c$. (Izmnoži izraze u zagradama pa će se svi članovi ukinuti).

Iz navedenog slijedi:

2) Teorem identičnosti polinoma

Dva polinoma stepena n-toga identična su, ako se podudaraju za $(n+1)$ različitih vrijednosti argumenta x.

To znači: dva polinoma $P_n(x)$ i $Q_n(x)$ identički su jednaka, tj. $P_n(x)\equiv Q_n(x)$, ako je

$P_n(x_1)=Q_n(x_1)$, $P_n(x_2)=Q_n(x_2)$, $P_n(x_3)=Q_n(x_3), \ldots, P_n(x_n)=Q_n(x_n)$ i konačno $P_n(x_{n+1})=Q_n(x_{n+1})$.

Posljedica:

$P_1(x)$ tj. pravac jednoznačno je određen s dvije tačke.
$P_2(x)$ tj. parabola jednoznačno je određena s tri tačke.
$P_3(x)$ tj. kubna parabola jednoznačno je određena s četiri tačke itd.

Vrijedi i obrat: s n zadanih tačaka u ravnini jednoznačno je određen polinom $(n-1)$-ga stepena.

Npr. kroz tri zadane tačke može se povući samo jedna parabola $P_2(x)$, kojoj je os simetrije okomita na os X, kroz četiri zadane tačke — samo jedna kubna parabola, kroz deset zadanih tačaka — samo jedan $P_9(x)$.

Primijetimo, da je opći presjek stošca

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

određen s pet tačaka, jer ako tu jednadžbu podijelimo s F dobijemo jednadžbu

$$\frac{A}{F}x^2+2\frac{B}{F}xy+\frac{C}{F}y^2+2\frac{D}{F}x+2\frac{E}{F}y+1=0,$$

u kojoj ima pet nepoznanica $\frac{A}{F}, \frac{B}{F}, \frac{C}{F}, \frac{D}{F}$ i $\frac{E}{F}$. Za određivanje tih nepoznanica treba zadati pet tačaka u ravnini, tj. pet parova vrijednosti za x i y. Uvrštenje tih vrijednosti u gornju jednadžbu dat će sustav od pet linearnih jednadžbi s pet nepoznanica $\frac{A}{F}, \frac{B}{F}, \frac{C}{F}, \frac{D}{F}$ i $\frac{E}{F}$. Na slični način može se pokazati, da je kružnica određena s tri tačke, parabola u općem položaju s četiri tačke itd. (Vidi Rep. elem. mat., IV, § 12).

•

3) Računanje vrijednosti polinoma

Polinom ima obzirom na druge funkcije, npr. $\sin x$, $\log x$ itd., tu veliku prednost, da se njegove vrijednosti vrlo jednostavno računaju za zadane vrijednosti x.

Npr. $P_5(x)=6x^5-3x^4+x^2-8$ za $x=2$:
$P_5(2)=6\cdot 2^5-3\cdot 2^4+2^2-8=140.$

Kako ćemo kasnije vidjeti, mnoge se funkcije približno prikazuju u obliku polinoma, da se njihove vrijednosti mogu lakše izračunati. Da se izbjegne dizanje na visoke potencije zadanih vrijednosti x, primjenjuje se obično tzv. Hornerova shema.

Ispišu se redom, kako slijede, svi koeficijenti polinoma, također i nule za one članove polinoma koji su izostavljeni, pa se postupa kako je to prikazano u primjerima koji slijede.

Primjeri.

1. $P_5(x)=6x^5-3x^4+x^2-8$. Za $x=2$:

	6	—3 +	0 +	+1 +	0 +	—8 +
$x=2$		12	18	36	74	148
	6·2	9·2	18·2	37·2	74·2	**140.**

$P_5(2)=140.$

2. $P_7(x)=2x^7-8x^3+7x-2$. Za $x=-3$.

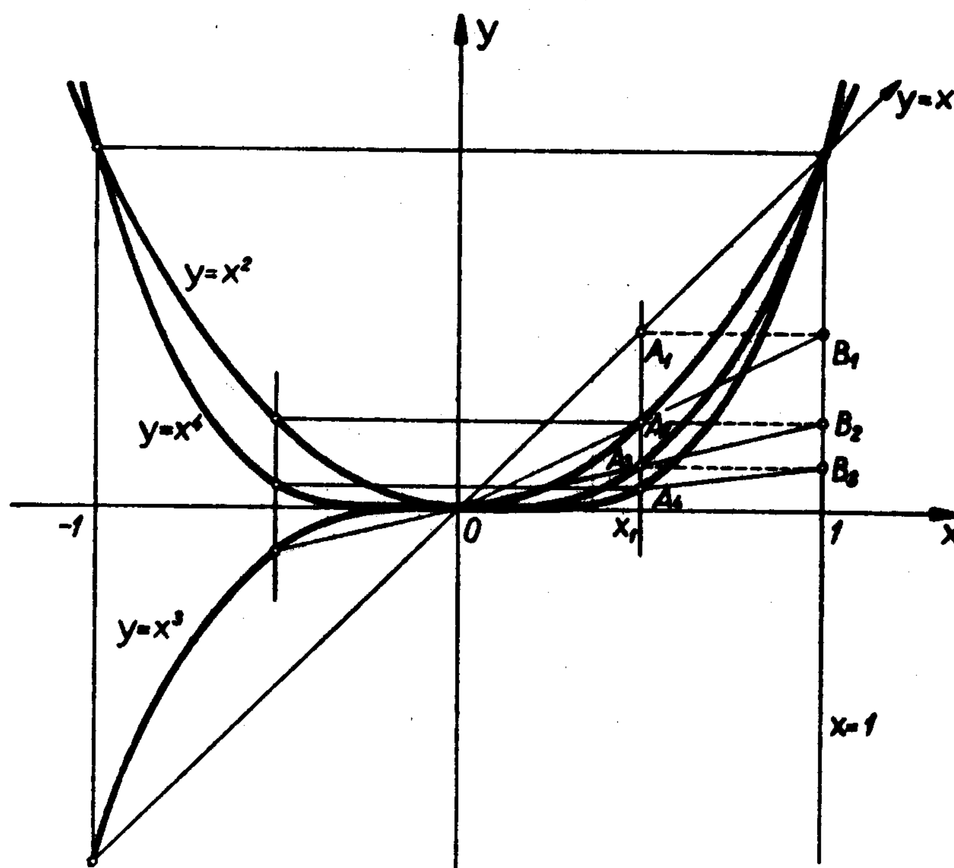
	2	0	0	0	—8	0	+7	—2
$x=-3$		—6	+18	—54	+162	—462	+1386	—4179
		—6	+18	—54	+154	—462	+1393	**—4181.**

$P_7(-3)=-4181.$

4) Grafičke konstrukcije polinoma

1. Konstrukcija grafova funkcije (potencije)

$$y = x^n \quad \text{za } n = 1, 2, 3, \ldots$$



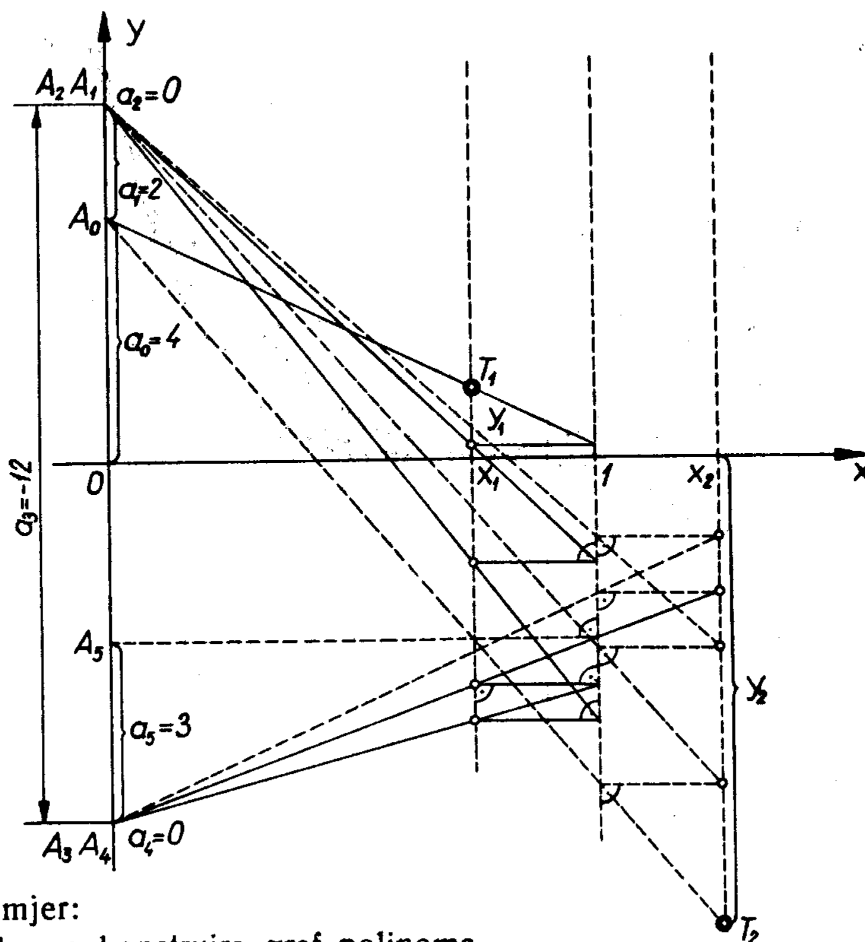
Sl. 33.

Najprije se crtaju pravci $y = x$ i $x = 1$. Iza toga se uzima apscisa x_1 po volji pa iz tačke A_1, u kojoj ordinata za x_1 siječe pravac $y = x$, spušta se okomica A_1B_1 na pravac $x = 1$. Spojnica OB_1 siječe ordinatu x_1A_1 u tački A_2, koja pripada funkciji $y = x^2$. Postupak se nastavlja pa se dobijaju tačke A_3, $A_4, \ldots$, koje pripadaju funkcijama $y = x^3$ $y = x^4, \ldots$ za istu apscisu x_1. Na isti način konstruiraju se tačke navedenih funkcija za druge po volji odabrane apscise x_2, $x_3, \ldots$

Lijeve strane krivulja crtaju se prema simetriji, jer su funkcije $y = x^{2n}$ take, pa su njihovi grafovi simetrični s obzirom na os Y, a $y = x^{2n-1}$ su lihe funkcije čiji su grafovi simetrični na ishodište ($2n$ je oznaka takog, tj. parnog broja, a $(2n - 1)$ ili $(2n + 1)$ — lihog broja).

2. Konstrukcija grafa polinoma

Počevši od a_0 nanose se na os Y u nekom izabranom mjerilu koeficijenti polinoma, pri čemu se uzimaju u obzir predznaci koeficijenata i koeficijenti koji su jednaki nuli. Prva se okomica spušta na pravac $x = 1$ iz tačke A, koja ima najveći indeks. Sve ostalo se jasno razabire iz primjera, koji slijedi.



Sl. 34.

Primjer:
Neka se konstruira graf polinoma

$$y = 3x^5 - 12x^3 + 2x + 4.$$

Na isti način kako smo u slici 34 odredili tačke T_1 i T_2 zadanog polinoma, određuju se i ostale tačke potrebne za konstrukciju grafa, koje se zatim spoje pomoću krivuljara u jednu neprekinutu krivulju.

3. Grafičko određivanje nultačaka polinoma.

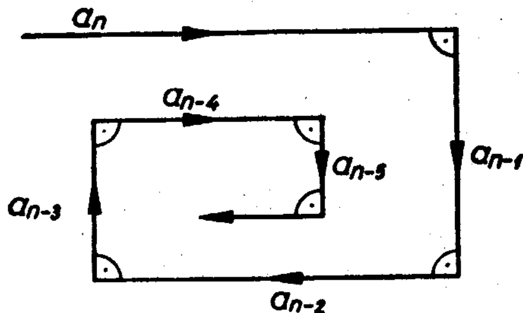
Određivanje nultačaka polinoma $P_n(x)$ svodi se na rješavanje algebarske jednadžbe n-tog stepena:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Lako se rješavaju linearne i kvadratne jednadžbe, dok su formule za korijene jednadžbi trećeg i četvrtog stepena toliko složene, da njihova pri-

mjena gotovo nema praktičkog značenja. Za jednadžbe još višeg stepena ne postoje uopće opća rješenja, ako su koeficijenti općenito zadani.

Grafički se nultačke polinoma ili korijeni algebarske jednadžbe određuju tako, da se počevši od a_n nanose u nekom izabranom mjerilu koeficijenti polinoma prema shemi prikazanoj u slici 35, pri čemu se negativni koeficijenti nanose u susuprotnom smislu.



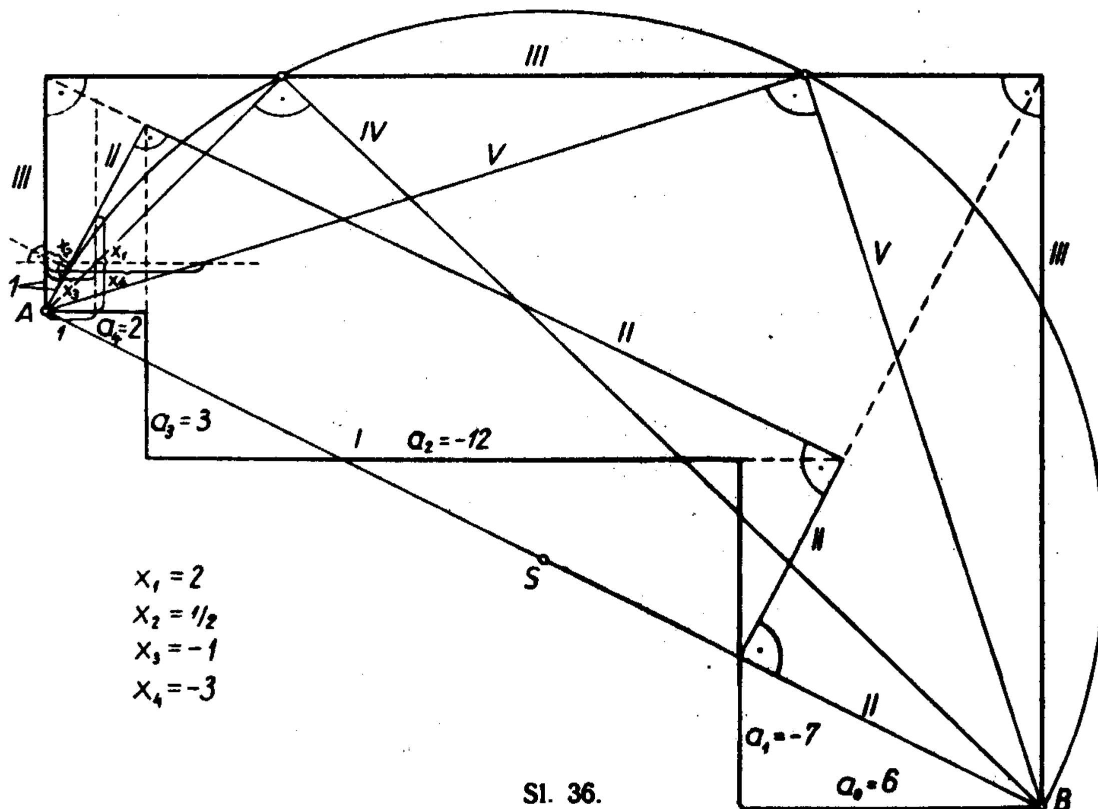
Sl. 35.

Iza toga se na dužinu a_n nanosi jedinica i konstruira okomica na kojoj će se kasnije očitati vrijednost prve tražene nultačke. Sam postupak se vidi iz primjera koji slijedi:

Primjer. Neka se grafički odrede nultačke polinoma

$$P_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6.$$

Prva nultačka određuje se pogađanjem. U tu svrhu crtamo polazeći iz početne tačke A poligona I poligon II tako, da se svaka njegova stranica lomi pod pravim kutom u tački presjeka sa stranicom poligona I ili s njezinim produženjem. Poligon II je pronađen, kad njegova posljednja stranica pogodi krajnju tačku B poligona I. Tada se na gore spomenutoj okomici očitava vrijednost prve nultačke. Tačno na isti način, ali pomoću poligona II, koji sada igra ulogu poligona I, određuje se druga nultačka polinoma itd. Posljednje dvije nultačke određuju se konstrukcijom pomoću kružnice, kojoj je promjer dužina AB (vidi sl. 36).



Sl. 36.

4. Kvalitativna slika polinoma

To je približna slika toka funkcije, a crta se na temelju slijedećih pravila:

1) Za velike $|x|$ polinom se vlada kao njegov najviši član.

2) U jednostrukoj nultački polinom siječe os X, u dvostrukoj — dira os X, u trostrukoj dira i siječe, u četverostrukoj široko dira itd.

Primjer.

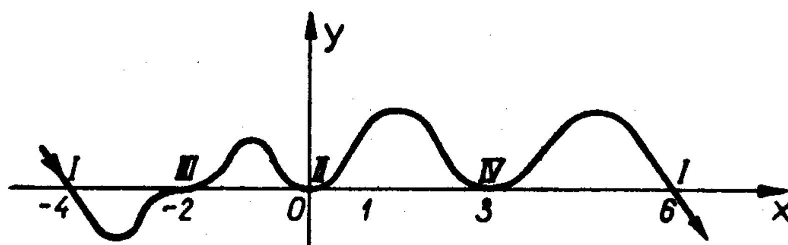
Neka se nacrta kvalitativna slika polinoma

$$P_{11}(x) = -2x^2(x+4)(x+2)^3(x-3)^4(x-6).$$

$$\lim_{x\to-\infty} P_{11}(x) = \lim_{x\to-\infty}(a_n x^n) = \lim_{x\to-\infty}(-2x^{11}) = -2\lim_{x\to-\infty} x^{11} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} P_{11}(x) = \lim_{x\to+\infty}(-2x^{11}) = -2\lim_{x\to+\infty} x^{11} = -\infty.$$

Polinom dolazi dakle iz $+\infty$ i odlazi u $-\infty$.



Sl. 37.

Nultačke:	$x = 0$	dvostruka	2
	$x = -4$	jednostruka	1
	$x = -2$	trostruka	3
	$x = 3$	četverostruka	4
	$x = 6$	jednostruka	1
			11

2. RAZLOMLJENE RACIONALNE FUNKCIJE

a) Pojam

Razlomljene racionalne funkcije sastavljene su iz konstanata i argumenta x konačnim brojem zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja.

Sada je dozvoljeno i dijeljenje s x, tj. x će biti u nazivniku. Prema tome razlomljena racionalna funkcija $R(x)$ ima općenito oblik kvocijenta dvaju polinoma: $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Npr.
$$y = \frac{\frac{1}{3}x^2 - \sqrt{3}\,x + 2}{x^3 - 2x + 7} = \frac{P_2(x)}{Q_3(x)}.$$

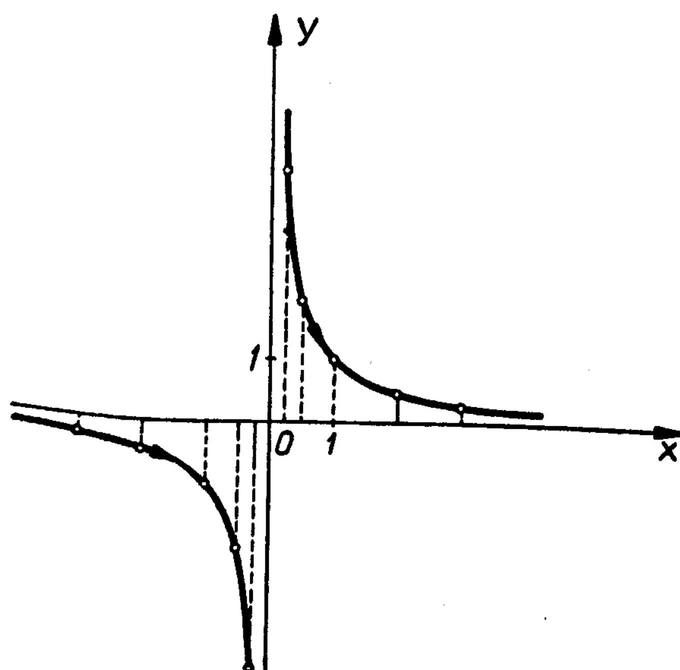
Ako je u $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

$n \geqq m$ $R(x)$ se zove n e p r a v a

$n < m$ $R(x)$ se zove p r a v a razlomljena funkcija.

U gornjem primjeru navedena je prava $R(x)$.

b) Najjednostavnije razlomljene racionalne funkcije $R(x)$



Sl. 38.

1) $y = \frac{1}{x}$ ili $xy = 1$

$y(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} =$

$= -y(x)$, dakle $y = \frac{1}{x}$

je liha funkcija

x	y	
0	$\frac{1}{0}$	nema smisla
$\pm\frac{1}{4}$	± 4	
$\pm\frac{1}{2}$	± 2	
± 1	± 1	
± 2	$\pm\frac{1}{2}$	
± 3	$\pm\frac{1}{3}$	

Znamo da je graf funkcije $y = \frac{1}{x}$ istostrana hiperbola, kojoj su asimptote koordinatne osi. (Vidi Rep. elem. mat. IV § 10).

$y = \frac{1}{x}$ je funkcija o b r a t n e r a z m j e r n o s t i, npr. $p \cdot v = c$ ili

$v = \frac{c}{p}$ (Boyle - Mariotteov zakon).

Prema slici 38: $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$, a $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$

($x \to -0$, odnosno $x \to +0$ znači da x teži nuli negativnim, odnosno pozitivnim vrijednostima, tj. $x \to 0$ s lijeva, odnosno s desna).

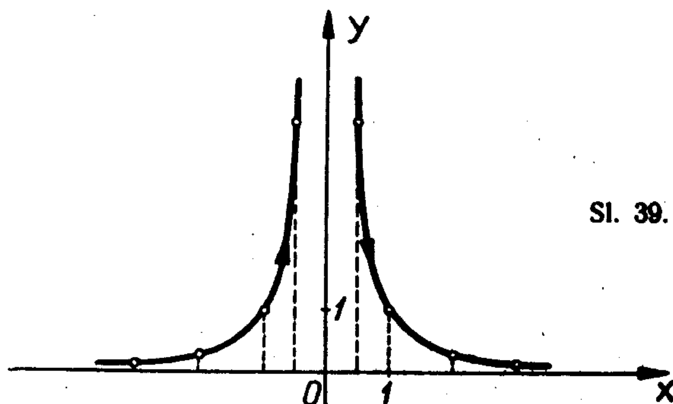
Kaže se, da funkcija za $x = 0$ ima t a č k u b e s k o n a č n o s t i ili p o l p r v o g r e d a, a kako je $x = 0$ jednostruka nultačka nazivnika funkcije može se općenito reći: u j e d n o s t r u k o j n u l t a č k i n a z i v n i k a i m a $R(x)$ p o l p r v o g r e d a, tj. j e d n a g r a n a k r i v u l j e p o l a z i u $-\infty$, a d r u g a d o l a z i iz $+\infty$ i l i o b r a t n o.

Opažamo, da razlomljena racionalna funkcija može težiti u beskonačnost za **konačne** vrijednosti x, dok polinom teži u beskonačnost samo kad x teži u beskonačnost.

2) $y = \frac{1}{x^2}$

$y(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = y(x)$, dakle $y = \frac{1}{x^2}$ je taka funkcija

x	y	
0	$\frac{1}{0}$	nema smisla
$\pm\frac{1}{2}$	$+4$	
± 1	$+1$	
$+2$	$+\frac{1}{4}$	
± 3	$+\frac{1}{9}$	



Sl. 39.

Prema slici 39:

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

To znači:

Za $x = 0$ ima funkcija **tačku beskonačnosti ili pol drugoga reda**, a kako je $x = 0$ dvostruka nultačka nazivnika funkcije, definiramo: **u dvostrukoj nultački nazivnika ima razlomljena racionalna funkcija $R(x)$ pol drugoga reda**, tj. **jedna grana krvulje polazi u** $+\infty$ (ili u $-\infty$), **a druga grana dolazi iz** $+\infty$ (ili iz $-\infty$).

3) Graf funkcije $y = \frac{1}{x^3}$ sličan je grafu funkcije $y = \frac{1}{x}$, graf $y = \frac{1}{x^4}$ sličan je grafu $y = \frac{1}{x^2}$ itd. Prva funkcija ima u $y = 0$ pol III reda, a druga funkcija — pol IV reda.

c) Nultačke i polovi $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Kako je razlomak jednak nuli, kad je njegov brojnik jednak nuli, **nultačke $R(x)$ su nultačke brojnika $P_n(x)$**, ukoliko nisu istodobno nultačke nazivnika $Q_m(x)$, tj.

$$R(x) = 0, \quad \text{kad je } P_n(x) = 0.$$

Znamo, da razlomak teži u beskonačnost, kad njegov nazivnik teži nuli, stoga su **tačke beskonačnosti ili polovi $R(x)$ nultačke nazivnika $Q_m(x)$**, ukoliko nisu istodobno nultačke brojnika $P_n(x)$, pri čemu jednostruka nultačka nazivnika daje pol prvoga reda, dvostruka — drugoga reda itd.

d) Kvalitativna slika razlomljene racionalne funkcije $R(x)$

Nultačke i polovi $R(x)$ nanose se u koordinatnom sustavu na temelju pravila navedenih pod c), pri čemu se u polovima konstruiraju asimptote krivulje okomite na os X. Osim toga se računa predznak jedne tačke funkcije, koja leži na lijevo od nanesenih nultačaka i polova, i još jedne tačke na desno radi kontrole

Primjer:

Neka se nacrta kvalitativna slika $R(x)$:

$$y = \frac{-2(x+5)(x-4)^2(x-6)(x-8)^3}{x(x+3)(x-2)^4(x-5)^3(x-7)^2}$$

Nultačke funkcije: $x = -5$ jednostruka
$x = 4$ dvostruka
$x = 6$ jednostruka
$x = 8$ trostruka

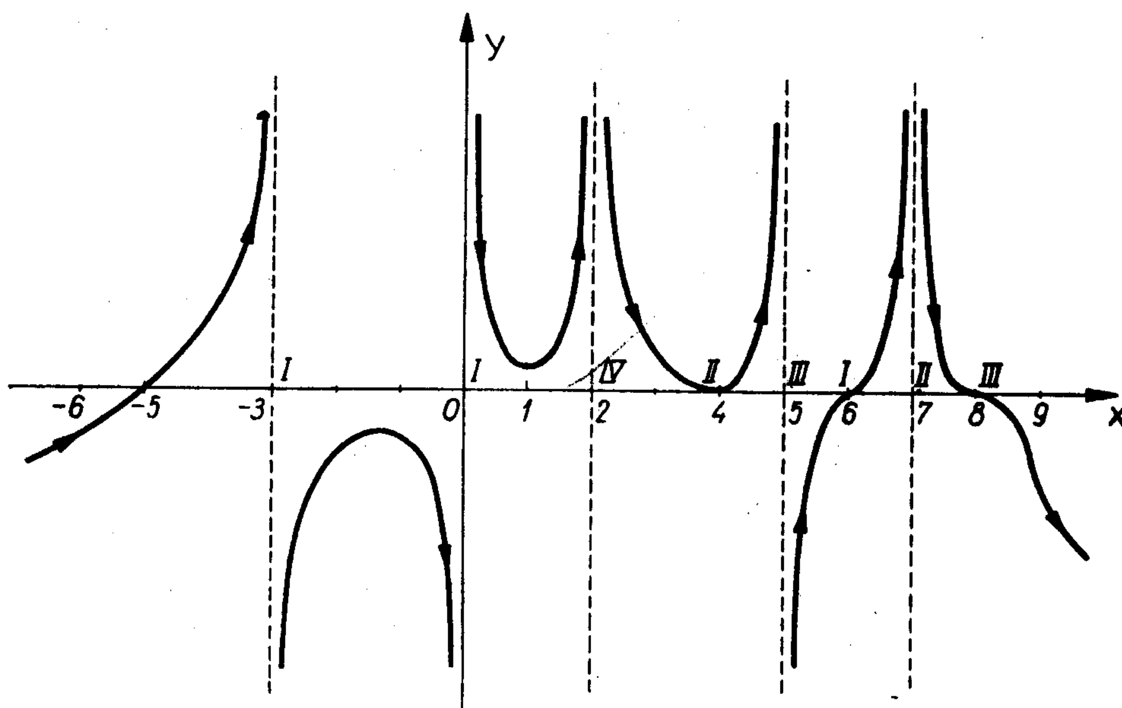
Polovi: $x = 0$ I reda
$x = -3$ I reda
$x = 2$ IV reda
$x = 5$ III reda
$x = 7$ II reda

$$\operatorname{sgn} y(-6) = \frac{(-)\cdot(-)\cdot(+)\cdot(-)\cdot(-)}{(-)\cdot(-)\cdot(+)\cdot(-)\cdot(+)} = \frac{+}{-} = -$$

(sgn znači signum tj. predznak).

$$\operatorname{sgn} y(+9) = \frac{(-)\cdot(+)\cdot(+)\ (+)\cdot(+)}{(+)\cdot(+)\cdot(+)\cdot(+)\cdot(+)} = \frac{-}{+} = -$$

To znači, da je zadana funkcija negativna na lijevo i na desno od nanesenih na os X nultačaka i polova (vidi sl. 40).



Sl. 40.

3. ALGEBARSKE FUNKCIJE

y je algebarska funkcija od x ako je y korijen algebarske jednadžbe n-tog stepena u y, kojoj su koeficijenti polinomi u x. Prema tome algebarska funkcija ima općenito oblik:

$$X_n(x)y^n + X_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + X_2(x)y^2 + X_1(x)y + X_0(x) = 0, \qquad (36)$$

gdje su $X_n(x)$, $X_{n-1}(x), \cdots, X_0(x)$ zadani polinomi u x.

Npr. $y = \sqrt{x}$, jer je $x^2 - y = 0$, $y^2 = 2px$ i $y = \sqrt[3]{2 - \sqrt[4]{x^3 - 1}}$ jesu algebarske funkcije.

Razlomljene racionalne funkcije i polinomi su samo posebni slučajevi algebarskih funkcija, jer, ako je u (36) $n = 1$, dobijemo

$$X_1(x)y + X_0(x) = 0 \qquad \text{(a)}$$

odatle $y = -\dfrac{X_0(x)}{X_1(x)}$, a to je razlomljena racionalna funkcija od x: $R(x)$,

a za $X_1(x) = 1$, slijedi iz (a): $y = -X_0(x)$, a to je polinom $P(x)$.

Sve ostale funkcije, tj. funkcije koje nisu algebarske, zovu se **transcendentne funkcije**.

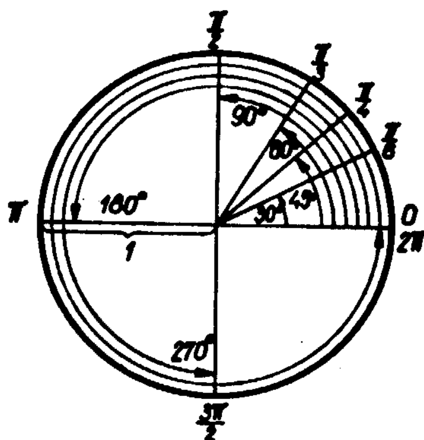
4. GONIOMETRIJSKE, TRIGONOMETRIJSKE ILI CIRKULARNE FUNKCIJE

a) Analitička, lučna ili arkus-mjera kuta

U višoj matematici, fizici, mehanici itd. razumije se pod x u izrazima $\sin x$, $\cos x$ i sl. **lučna ili arkus-mjera kuta**.

Lučna mjera kuta α ili arc α (čitaj „arkus α") je duljina luka, koji odgovara središnjem kutu α u kružnici polumjera 1.

Kako opseg kružnice za $r = 1$ iznosi 2π, može se lako napisati lučna mjera nekih kutova, kako je to prikazano u sl. 41.



Sl. 41.

$$\text{arc } 0 = 0$$
$$\text{arc } 30^\circ = \frac{\pi}{6} = 0{,}52360$$
$$\text{arc } 45^\circ = \frac{\pi}{4} = 0{,}78540$$
$$\text{arc } 60^\circ = \frac{\pi}{3} = 1{,}04720$$
$$\text{arc } 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1{,}57080$$
$$\text{arc } 180^\circ = \pi = 3{,}14159$$
$$\text{arc } 270^\circ = \frac{3\pi}{2} = 4{,}71239$$
$$\text{arc } 360^\circ = 2\pi = 6{,}28319$$

(na 5 decimala tačno).

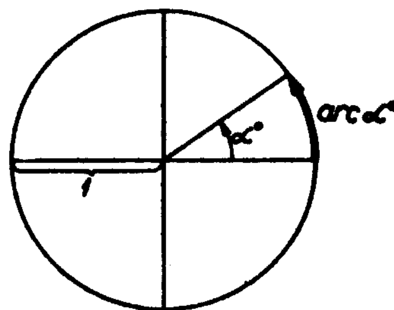
Lučna mjera kakvagod kuta α i obratno kutna mjera iz lučne određuje se iz razmjera prema sl. 42.

$$\alpha^0 : \text{arc}\,\alpha^0 = 360^0 : 2\pi, \quad \text{a odatle}$$

$$\alpha^0 = \frac{360^0 \cdot \text{arc}\,\alpha^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi} \text{arc}\,\alpha^0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{180^0}{\pi} = \frac{180^0}{3{,}14159\ldots} = 57{,}296^0 = \rho^0 = \text{r a d i j a n.} \qquad (37)$$

Prema tome formula (a) glasi:



Sl. 42.

$$\alpha^0 = \rho^0 \cdot \text{arc}\,\alpha^0$$

ili

$$\alpha' = \rho' \cdot \text{arc}\,\alpha'$$

ili

$$\alpha'' = \rho'' \cdot \text{arc}\,\alpha''$$

općenito

$$\alpha = \rho \cdot \text{arc}\,\alpha \qquad (37)$$

a odatle

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\alpha}{\rho} \qquad (38)$$

ili

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\alpha^0}{\rho^0} = \frac{\alpha'}{\rho'} = \frac{\alpha''}{\rho''}.$$

Tu je

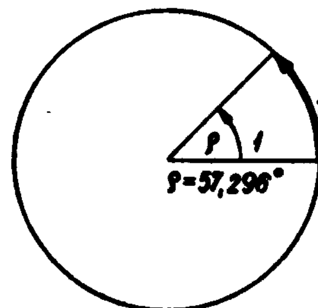
$$\left.\begin{aligned} \rho^0 &= 57^0{,}2957\ldots \\ \rho' &= 3437'{,}746\ldots \\ \rho'' &= 206264{,}80\ldots \\ \rho &= 57^0 17' 44''{,}80\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Koji luk odgovara kutu ρ u kružnici polumjera 1 ?

Uvrštenje $\alpha = \rho$ u (38) daje:

$$\text{arc}\,\rho = \frac{\rho}{\rho} = 1,$$

radijanu ρ odgovara luk duljine 1 (duljine polumjera).



Sl. 43.

Primjeri:

1. arc $318^0 53' 27'' = ?$

Prema (38): arc $318^0 53' 27'' = \frac{1148007''}{206264{,}8''} = \underline{5{,}56570.}$

2. arc $\alpha = 4{,}51$; $\alpha = ?$

Prema (37): $\alpha = 4{,}51 \cdot \rho = 4{,}51 \cdot 206264{,}8'' = 930254{,}2'' = \underline{258^0 24' 14''}.$

Mnogo jednostavnije i brže rješavaju se ti zadaci pomoću tablica. Vidi npr. tablicu IV. „Duljine kružnih lukova za $r = 1$" u logaritamskim tablicama po O. Schlömilchu i J. Majcenu

Primjeri:

1. $318^0 5'27'' = ?$

$$\begin{array}{ll} \text{arc } 300^0 & = 5{,}23599 \\ \text{arc } 18^0 & = 0{,}31416 \\ \text{arc } 53' & = 0{,}01542 \\ \text{arc } 27'' & = 0{,}00013 \\ \hline \text{arc } 318^0 53'27'' & = 5{,}56570 \end{array} \Bigg| +$$

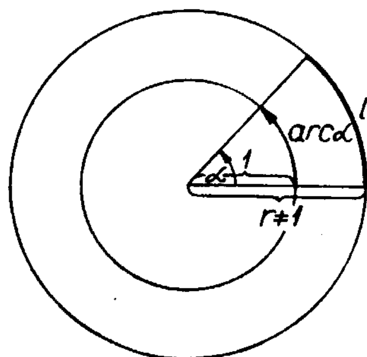
2. $\text{arc}\,\alpha = 4{,}51; \quad \alpha = ?$

$$\begin{array}{ll} 4{,}51 & \\ -\,4{,}36332 & = \text{arc } 250^0 \\ \hline 0{,}14668 & \\ -\,0{,}13963 & = \text{arc } 8^0 \\ \hline 0{,}00705 & \\ -\,0{,}00698 & = \text{arc } 24' \\ \hline 0{,}00007 & = \text{arc } 14'' \\ & \alpha = 258^0 24'14'' \end{array}$$

Uzmimo sada da je polumjer kružnice r različit od 1. Iz razmjera prema slici 44,

$$l : \text{arc}\,\alpha = r : 1, \quad \text{slijedi:}$$

$$l = r \cdot \text{arc}\,\alpha. \tag{40}$$



Sl. 44.

To znači: duljina kružnog luka računa se tako, da se lučna mjera pripadnog središnjeg kuta pomnoži polumjerom.

Često se piše neposredno $l = r \cdot \alpha$, gdje se pod α razumije središnji kut u lučnoj mjeri.

Iz (40) slijedi: $\text{arc}\,\alpha = \frac{l}{r}$, (41)

tj. lučna mjera kuta dobije se tako, da se pripadni kružni luk podijeli polumjerom kružnice.

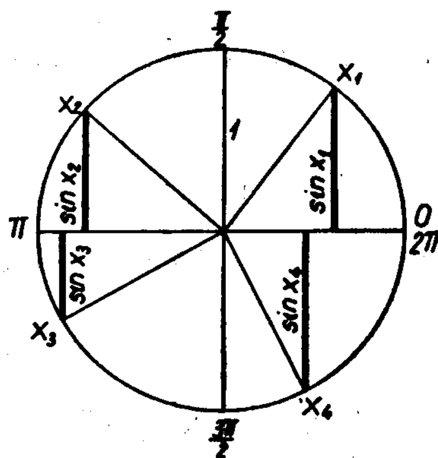
Iz (41) slijedi dalje da je lučna mjera kuta čist neimenovan broj. Npr. za $l = 24$ cm i $r = 8$ cm $\text{arc}\,\alpha = \frac{24\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = 3.$

Primjer: Neka se izračuna duljina luka u kružnici polumjera $r = 2{,}35$ cm, ako pripadni središnji kut iznosi $63^0 21'40''$.

$l = r \cdot \text{arc}\,\alpha = 2{,}35 \cdot \text{arc } 63^0 21'40'' =$
$= 2{,}35 \cdot 1{,}106 = \underline{2{,}60 \text{ cm}}.$

b) Funkcija $y = \sin x$ (sl. 45).

(Vidi Repetitorij elem. matematike, pogl. III. Goniometrija i trigonometrija).



Sl. 45.

1) $y(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -y(x)$
$y = \sin x$ je liha funkcija.

2) Najmanji period funkcije $\sin x$ je $P = 2\pi$, tj.
$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

3) $\sin x$ prima vrijednosti u zatvorenom intervalu od -1 do $+1$, tj. $-1 \leqq \sin x \leqq +1$ ili $|\sin x| \leqq 1$.

4) Nultačke: $\sin x = 0$ za

$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$

Općenito: $x = k\pi$ jesu nultačke $\sin x$, gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ (42)

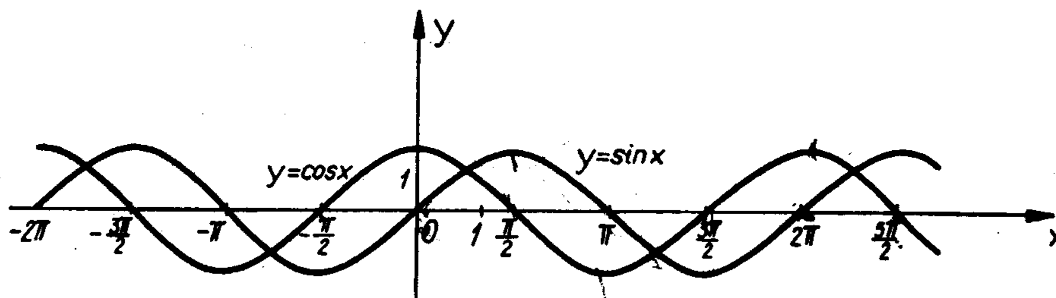
5) Tačke maksimuma i minimuma:

$$\sin x = +1, \quad \text{za} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (43)$$

$$\sin x = -1, \quad \text{za} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \qquad (44)$$

gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

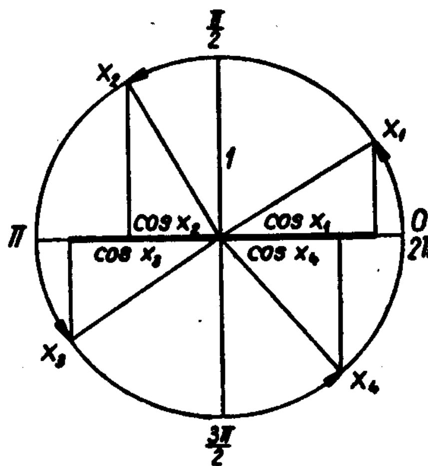
6) Graf unkcije $y = \sin x$ (sinusoidu) vidi na sl. 46.



Sl. 46.

c) **Funkcija** $y = \cos x$ (sl. 47).

Znamo, da je $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, tj. kosinusoida je sinusoida pomaknuta za $\frac{\pi}{2}$ na lijevo, (vidi sl. 46).



Sl. 47.

1) $y(-x) = \cos(-x) = \cos x = y(x)$, dakle $y = \cos x$ je taka funkcija.

2) Najmanji period funkcije $y = \cos x$ je $P = 2\pi$, tj. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

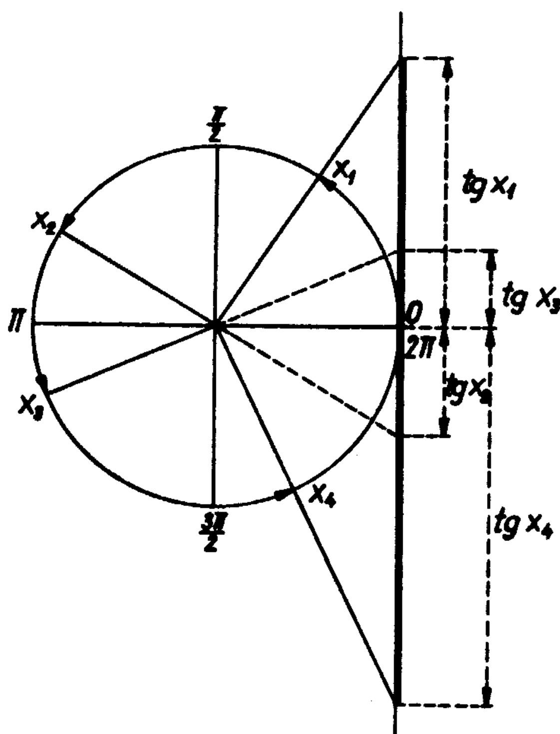
3) $-1 \leqq \cos x \leqq +1$ ili $|\cos x| \leqq 1$.

4) Nultačke: $\cos x = 0$ za $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 5\frac{\pi}{2}, \pm \ldots$

Općenito: $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ jesu nultačke $\cos x$, (45)

gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$(2k + 1)$ je lih broj!



Sl. 48.

5) Tačke maksimuma i minimuma:

$\cos x = +1$ za

$x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$ (46)

$\cos x = -1$ za

$x = \pi + 2k\pi.$ (47)

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6) Graf funkcije $y = \cos x$ (kosinusoidu) vidi na sl. 46.

Primjedba. U toku jednog perioda $P = 2\pi$ imadu funkcije $\sin x$ i $\cos x$ dvije nultačke, jednu tačku maksimuma i jednu tačku minimuma, tj. međusobna udaljenost nultačaka je π, a tačaka istih ekstrema 2π.

d) Funkcija $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (sl. 48).

1) $y(-x) = \operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x = -y(x)$, tj.

$y = \operatorname{tg} x$ je liha funkcija.

2) Najmanji period funkcije $y = \operatorname{tg} x$ je $P = \pi$, jer je

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x, \text{ tj.}$$

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3) $\operatorname{tg} x$ prima sve vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$, tj.

$$-\infty < \operatorname{tg} x < +\infty \text{ ili } |\operatorname{tg} x| < \infty.$$

4) Nultačke: Kako je $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, nultačke $\operatorname{tg} x$ su nultačke brojnika $\sin x$, pa prema (42)

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{za} \quad x = k\pi. \qquad (48)$$

To su nultačke $\operatorname{tg} x$.

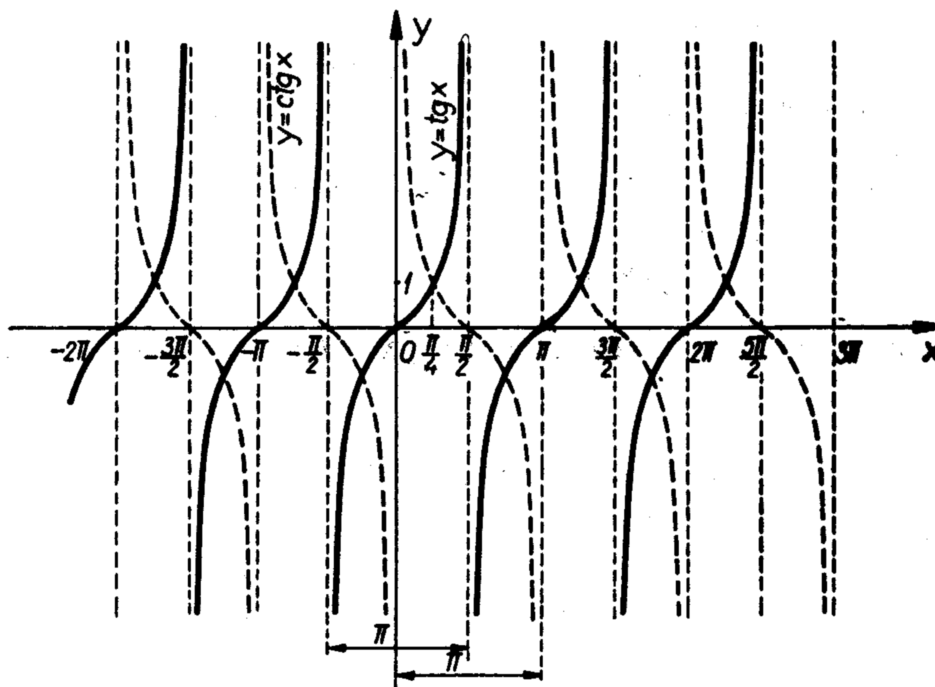
5) Polovi: $\operatorname{tg} x \to \infty$, kad nazivnik $\cos x \to 0$, tj. polovi $\operatorname{tg} x$ su nultačke $\cos x$, a kako $\cos x$ ima samo obične (jednostruke) nultačke, ima $\operatorname{tg} x$ polove prvog reda.

Dakle prema (45)

$$\operatorname{tg} x = \pm \infty, \text{ za } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}. \qquad (49)$$

To su polovi $\operatorname{tg} x$.

6) Graf funkcije $y = \operatorname{tg} x$ (tangentoidu) vidi na sl. 49.



Sl. 49.

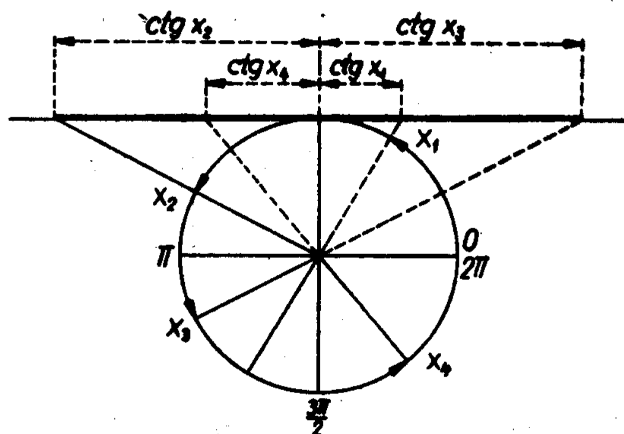
e) **Funkcija** $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ (sl. 50).

1) $y(-x) = \operatorname{ctg}(-x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(-x)} = \dfrac{1}{-\operatorname{tg} x} = -\operatorname{ctg} x = -y(x)$; $y = \operatorname{ctg} x$ je liha funkcija.

2) Najmanji period funkcije $\operatorname{ctg} x$ je π, jer je

$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x+\pi)} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$, tj.

$\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$,
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Sl. 50.

Vidimo, da funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ imaju isti period π, dok je 2π period funkcija $\sin x$ i $\cos x$.

3) $\operatorname{ctg} x$ prima sve vrijednosti od $-\infty$, do $+\infty$, tj.

$$-\infty < \operatorname{ctg} x < +\infty \quad \text{ili} \quad |\operatorname{ctg} x| < \infty.$$

4) Nultačke: kako je $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ nultačke $\operatorname{ctg} x$ su nultačke brojnika $\cos x$, pa je prema (45)

$$\operatorname{ctg} x = 0 \quad \text{za} \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}. \qquad (50)$$

To su nultačke $\operatorname{ctg} x$.

5) Polovi: Polovi za $\operatorname{ctg} x$ su nultačke nazivnika $\sin x$, a kako $\sin x$ ima samo jednostruke nultačke, ima $\operatorname{ctg} x$ polove prvoga reda. Dakle prema (42):

$$\operatorname{ctg} x = \pm\infty \quad \text{za} \quad x = k\pi \qquad (51)$$

To su polovi $\operatorname{ctg} x$.

6) Graf funkcije $y = \operatorname{ctg} x$ (kotangentoidu) vidi na sl. 49.

f) Općenitiji oblici funkcija sinusa i kosinusa

1) $$y = A \sin x.$$

Kako je $(\sin x)_{maks.} = +1$, a $(\sin x)_{min.} = -1$, bit će

$$y_{maks.} = A, \quad \text{a} \quad y_{min.} = -A.$$

Stoga se A zove *amplituda.*

2) $$y = A \sin mx.$$

Amplituda je A.

Najmanji period je $$P = \frac{2\pi}{m} \qquad (52)$$

jer je $A \sin mx = A \sin(mx + 2\pi) = A \sin\left[m\left(x + \frac{2\pi}{m}\right)\right]$; x se povećao za $\frac{2\pi}{m}$, a funkcija je sačuvala svoju prijašnju vrijednost $A \cdot \sin mx$.

Prema tome je npr.

$$\text{za} \quad \sin 2x \qquad P = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{za} \quad \sin\frac{x}{2} \qquad P = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\text{za} \quad \sin \pi x \qquad P = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

Vidimo, da je za $m = 1$ period $P = 2\pi$, dok se za $m > 1$ period umanjuje, a za $m < 1$ povećaje.

3) $$y = A \sin(mx + n).$$

Amplituda je A.

Period je $$P = \frac{2\pi}{m}.$$

n je pomak faze ili fazna konstanta ili faza, jer sada za $y = 0$ y nije više nula, već je

$$y(0) = A \sin n.$$

Graf funkcije pomaknut je uzduž osi X za n i to na lijevo za $n > 0$, odnosno na desno za $n < 0$.

Graf funkcije $y = A \sin(mx + n)$ konstruira se tako, da se opiše kružnica polumjera $r = A$, iza toga se konstruira središnji kut $\alpha = \rho^0 n$ pa se kružnica podijeli u pozitivnom smislu, koji je protivan okretanju kazaljke na satu, u izvjesni broj jednakih dijelova, npr. osam, i nacrtaju pripadne vrijednosti sinusa. Na isti broj dijelova podijeli se na os X naneseni period $\frac{2\pi}{m}$ i u svim diobenim tačkama konstruiraju okomice na os X, na koje se prenose nacrtane vrijednosti sinusa, a posebno vrijednosti maksimuma i minimuma. Na taj način može se konstruirati toliko tačaka, koliko je potrebno za konstrukciju grafa funkcije.

Primjer 1. Neka se nacrta graf funkcije

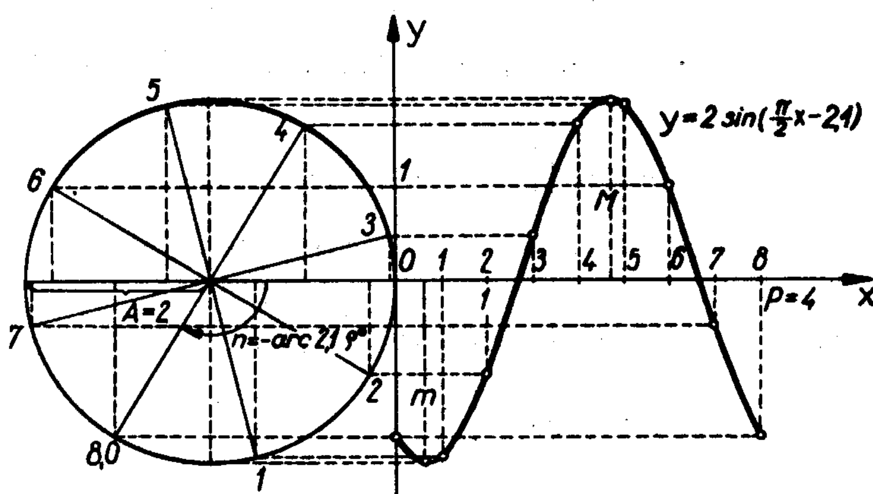
$$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2{,}1\right)$$

$$A = 2$$

$$P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$n = -2{,}1 = -\text{arc}\,(2{,}1 \cdot \rho^0) = -\text{arc}\,(2{,}1 \cdot 57{,}3^0) = -\text{arc}\,120{,}3^0.$$

Potrebni broj jedinica na osi X: $2A + P = 4 + 4 = 8$ (vidi sl. 51).



Sl. 51.

Sve prije navedeno za općenitije oblike sinus-funkcije vrijedi i za funkciju kosinusa:

4) $y = A\cos(mx + n)$.

Primjer 2. Neka se nacrta graf funkcije

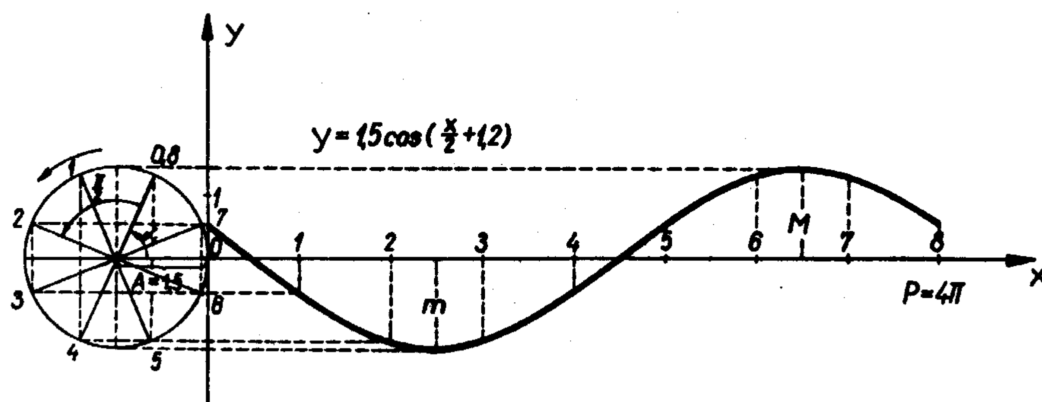
$$y = 1{,}5\cos\left(\frac{x}{2} + 1{,}2\right).$$

$A = 1{,}5$

$$P = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$n = 1{,}2 = \text{arc}\,(57{,}3^\circ \cdot 1{,}2) = \text{arc}\ 68{,}8^\circ = \alpha.$

Broj potrebnih jedinica na osi $Y: 2A + P = 3 + 4\pi = 3 + 12{,}56 = 16$ (vidi sl. 52).



Sl. 52.

Kod ovog načina konstrukcije grafa funkcije kosinusa moramo pojedine vrijednosti kosinusa uzimati u šestar pa ih nanositi na okomice uzimajući u obzir predznak funkcije. Da se to izbjegne, prelazi se obično od kosinusa na sinus, pribrajajući argumentu zadane funkcije $\frac{\pi}{2}$, jer znamo da je

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Mijenjamo, dakle, fazu zadane funkcije i tako prelazimo od kosinusa na sinus.

Pokažimo to na našem predašnjem primjeru:

$$y = 1{,}5\cos\left(\frac{x}{2} + 1{,}2\right)$$

$$y = 1{,}5\ \sin\left(\frac{x}{2} + 1{,}2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

a kako je $\frac{\pi}{2} \doteq \frac{3,14}{2} \doteq 1,57,$ imamo

$$y = 1,5 \sin\left(\frac{x}{2} + 2,77\right).$$

Sada crtamo graf te funkcije, kako je u primjeru 1. prikazano. ($A = 1,5$; $P = 4\pi$; $n = +2,77 = \text{arc } 158,7^0$). Dobijemo isti graf, koji je već predočen na sl. 52.

Prikažemo li zadane funkcije sinusa i kosinusa u obliku vektora, možemo lako nacrtati graf zbroja tih funkcija, ako su zadane funkcije istog perioda. Zbrajanje vektora vrši se po pravilu paralelograma.

Pokažimo to na primjeru.

Primjer 3. Neka se nacrta graf funkcije

$$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2,1\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} x - 1\right).$$

Prelazimo na funkciju sinusa:

$$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2,1\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

ili uz $\frac{\pi}{2} \doteq 1,57$

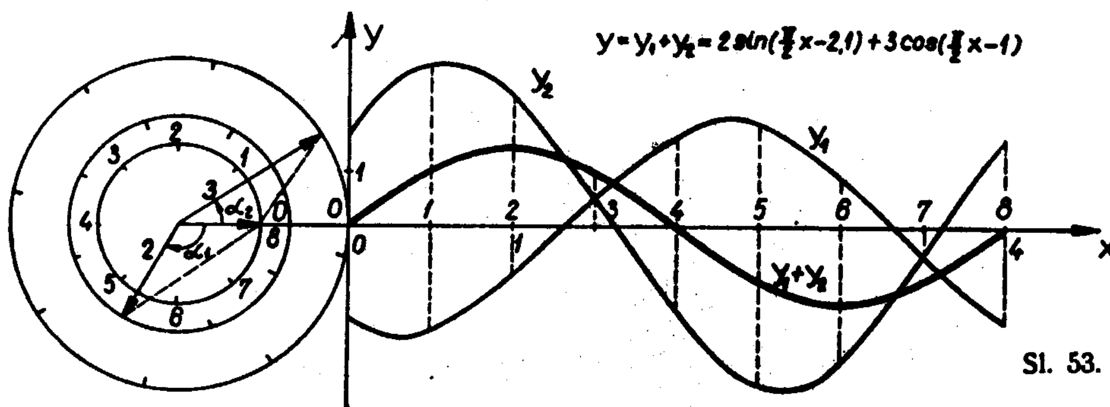
$$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2,1\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} x + 0,57\right).$$

Obje funkcije nacrtamo na prijašnji način, prikažemo u obliku vektora, zbrojimo ih po pravilu paralelograma, a zatim dijelimo kružnicu u 8 jednakih dijelova i postupamo kao prije.

I funkcija: $A = 2$; $P = 4$; $n = \text{arc}(-2,1 \cdot 57,3^0) = \text{arc}(-120,3^0)$.

II funkcija: $A = 3$; $P = 4$ (isti!); $n = \text{arc}(0,57 \cdot 57,3^0) = \text{arc } 32,7^0$,

(vidi sl. 53). Analitičko rješenje tog primjera vidi dalje.



Sl. 53.

Na sličan način konstruiraju se grafovi funkcija

$$y = A \operatorname{tg}(mx + n)$$
$$y = A \operatorname{ctg}(mx + n),$$

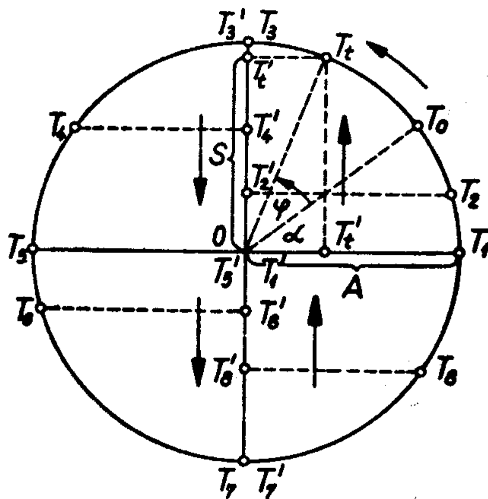
ali, kako je period tih funkcija $P = \pi$, u jednaki broj dijelova dijeli se polovina kružnice.

Očito je da možemo na gore navedeni način nacrtati graf $y = y_1 + y_2$, a da ne crtamo grafove y_1 i y_2.

g) Primjeri za općenitiji oblik funkcije sinusa

1) Harmoničko gibanje ili titranje ili oscilacija

To gibanje nastaje tako, da se jedna tačka T jednoliko, tj. s konstantnom brzinom, giba po kružnici nekog polumjera A prelazeći uzastopno tačkama T_1, T_2, T_3, T_4, itd. (vidi sl. 54). Tada njezina projekcija na vertikalni ili horizontalni promjer kružnice vrši harmoničko gibanje (vidi tačke T_1', T_2', T_3', T_4', itd).



Sl. 54.

Ako se u momentu $t = 0$ tačka, koja se jednoliko giblje po kružnici, nalazi u tački T_0 (vidi sl. 54), kojoj odgovara kut α (u lučnoj mjeri), a u momentu t u tački T_t prevalivši za to vrijeme kut φ, tada iz pravokutnog $\triangle OT_t'T_t$ slijedi, da jednadžba puta s, što ga je prevalila tačka, koja vrši po vertikalnom promjeru harmoničko gibanje, glasi:

$$s = A \sin(\varphi + \alpha). \qquad \text{(a)}$$

Označimo li s T vrijeme jednog potpunog okretaja tačke po kružnici, tj. vrijeme jednog titraja, dobit ćemo iz razmjera

$$\varphi : 2\pi = t : T,$$

da je $\varphi = \frac{2\pi}{T} t$, gdje je $\frac{2\pi}{T} = \omega$ kutna brzina tačke, tj. kut u lučnoj mjeri koji tačka prevaljuje po kružnici u jedinici vremena (u 1 sekundi). Uvrštenje u (a) daje jednadžbu harmoničkog gibanja

$$s = A \sin(\omega t + \alpha). \qquad (53)$$

Tu je s = put, t = vrijeme, A = amplituda, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ = kutna brzina, α = početni fazni kut.

Projiciramo li jednoliko gibanje tačke po kružnici na horizontalni promjer, dobijemo jednadžbu harmoničkog gibanja u obliku

$$s = A \cos(\omega t + \alpha). \qquad (53a)$$

2) Zbrajanja izmjeničnih struja

U isti vod puštene su istodobno dvije sinus-struje različite maksimalne jakosti i različitih početnih faznih kutova, ali istog perioda ili iste frekvencije. Traži se izraz za zbroj tih struja.

Zadano:

Jakost struje I: $I_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1)$
Jakost struje II: $I_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \alpha_2)$.

Period obiju struja: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ili njihova frekvencija, tj. broj titraja u sekundi,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Maksimalne jakosti struja $= I_{1m}$, odnosno I_{2m}.

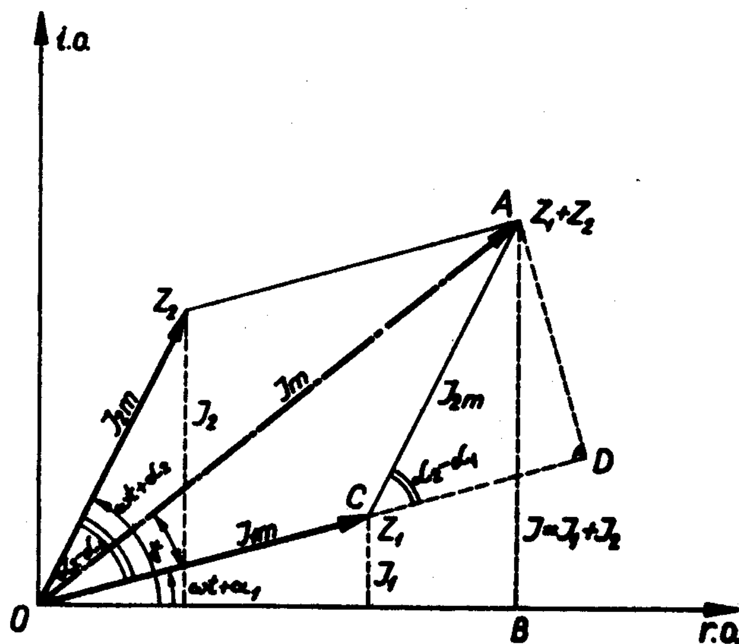
Traži se: $I_1 + I_2 = I$.

Nadopunimo izraze za I_1 i I_2 na potpune kompleksne brojeve oblika $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, tj. dodamo izrazima za I_1 i I_2: $i I_{1m} \cos(\omega t + \alpha_1)$, odnosno $i I_{2m} \sin(\omega t + \alpha_2)$, (vidi § 1, 2).

Dobit ćemo dva kompleksna broja

$$z_1 = I_{1m}[\cos(\omega t + \alpha_1) + i \sin(\omega t + \alpha_1)]$$
$$z_2 = I_{2m}[\cos(\omega t + \alpha_2) + i \sin(\omega t + \alpha_2)],$$

koje prikažemo u obliku vektora u ravnini kompleksnih brojeva i izvršimo zbrajanje tih vektora. Opažamo da su I_1 i I_2 imaginarni dijelovi od z_1 i z_2 (vidi sl. 55).



Sl. 55.

Iz $\triangle\ OBA$:

$$I = I_1 + I_2 = I_m \sin(\omega t + \alpha_1 + \gamma). \qquad (a)$$

$$I_m = ? \quad \gamma = ?$$

Iz $\triangle\ OCA$ po kosinusovom poučku slijedi:

$$I^2_m = I^2_{1m} + I^2_{2m} - 2 I_{1m} I_{2m} \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)]$$

Odatle

$$I_m = \sqrt{I^2_{1m} + I^2_{2m} + 2 I_{1m} I_{2m} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \qquad (b)$$

Iz $\triangle\ ODA$:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{AD}{OD} = \frac{AD}{OC + CD} \qquad (c)$$

Iz $\triangle\ CDA$: $AD = I_{2m} \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$; $CD = I_{2m} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Uvrštenje u (c) daje izraz, kojim je određen kut γ:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{I_{2m} \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{I_{1m} + I_{2m} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \qquad (54)$$

Uvrštenje (b) u (a) daje:

$$I = I_1 + I_2 = \sqrt{I^2_{1m} + I^2_{2m} + 2 I_{1m} I_{2m} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1 + \gamma), \qquad (54a)$$

gdje je kut γ određen formulom (54).

Taj izraz za traženi zbroj struja kazuje, da je zbroj sinus-struja iste frekvencije opet sinus-struja iste frenkvencije $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, ali nove maksimalne jakosti (vidi (b)) i novog početnog faznog kuta $(\alpha_1 + \gamma)$. Može se pokazati, da to pravilo vrijedi za bilo koji konačan broj sinus-struja iste frekvencije.

Pomoću formula (54) možemo također izračunati zbroj funkcija sinusa, odnosno kosinusa istog perioda. Pokažimo to na našem pređašnjem primjeru 3.

$$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2{,}1\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} x - 1\right)$$

ili

$$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2{,}1\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} x + 0{,}57\right) \qquad \text{(vidi gore).}$$

Uvrstimo li u (54)

$I_{1m} = 2$; $I_{2m} = 3$; $\alpha_1 = (-2{,}1 \cdot \rho^0) = -120{,}3^0$; $\alpha_2 = 0{,}57 \cdot \rho^0 = 32{,}7^0$; $\alpha_2 - \alpha_1 = 153^0$

dobijemo

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{3 \sin 153^0}{2 + 3 \cos 153^0} = \frac{3 \cos 63^0}{2 - 3 \sin 63^0},$$

a odatle pomoću logaritamskog računala*) imamo:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{3 \cdot 0{,}45}{2 - 3 \cdot 0{,}89} = \frac{1{,}35^0}{-0{,}67} = -2{,}02,$$

*) Vidi od istog pisca: „Logaritamsko računalo", V izd. Tehnička knjiga, Zagreb 1962.

pa je $\gamma = 180 - 63{,}7^0 = 116{,}3^0$ ili u lučnoj mjeri $\gamma = 2{,}03$. (II kvadrant, jer je samo u tom kvadrantu sinus pozitivan, a kosinus negativan).

Uvrštavanje zadanih i dobivenih vrijednosti u (54a) daje:

$$y = \sqrt{4 + 9 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 153^0} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2{,}1 + 2{,}03\right)$$

ili

$$y = \sqrt{13 - 12 \sin 63^0} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 0{,}07\right)$$

Odatle

$$y = \sqrt{13 - 12 \cdot 0{,}89} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 0{,}07\right)$$

ili

$$y = \sqrt{2{,}32} \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 0{,}07\right)$$

i konačno:

$$\underline{y = 1{,}52 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 0{,}07\right).}$$

Pokažimo na istom primjeru još jedan način zbrajanja funkcija sinusa, odnosno kosinusa.

$$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2{,}1\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} x - 1\right)$$

ili

$$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2{,}1\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} x + 0{,}57\right) \qquad \text{(vidi gore).}$$

Stavimo:

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x - 2{,}1\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} x + 0{,}57\right) = A \sin\left(\frac{\pi}{2} x + \alpha\right) \quad A = ? \ \alpha = ?$$

Prema trigonometrijskim formulama $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$ imamo:

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cdot \cos 2{,}1 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \sin 2{,}1 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cdot \cos 0{,}57 +$$

$$+ 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cdot \sin 0{,}57 = A \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cos\alpha + A \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cdot \sin\alpha,$$

ili ako uredimo:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)(2 \cos 2{,}1 + 3 \cos 0{,}57) + \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)(-2 \sin 2{,}1 + 3 \sin 0{,}57) =$$

$$= A \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cos\alpha + A \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cdot \sin\alpha.$$

Ta jednakost vrijedi za svaki x samo u tom slučaju, kad su koeficijenti članova sa $\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ i $\cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ na lijevoj i desnoj strani jednadžbe međusobno jednaki, tj. ako je

$$A \cos\alpha = 2 \cos 2{,}1 + 3 \cos 0{,}57$$

$$A \sin\alpha = -2 \sin 2{,}1 + 3 \sin 0{,}57.$$

Računanje desnih strana tih jednadžbi daje:

$A \cos\alpha = 2 \cos 120{,}3^0 + 3 \cos 32{,}7^0 = -2 \sin 30{,}3^0 + 3 \cos 32{,}7^0 = -2 \cdot 0{,}50 - 3 \cdot 0{,}84 = 1{,}52$

$A \sin\alpha = -2 \sin 120{,}3^0 + 3 \sin 32{,}7^0 = -2 \cos 30{,}3^0 + 3 \sin 32{,}7^0 = -2 \cdot 0{,}86 - 3 \cdot 0{,}54 =$
$= -0{,}10.$

Imamo dakle:

$$A \cos \alpha = \ \ 1{,}52$$
$$A \sin \alpha = -0{,}10.$$

Podijelivši drugu jednadžbu prvom dobijemo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-0{,}10}{1{,}52} = -0{,}07.$$

Odatle:

$$\alpha = \operatorname{arc} (-4^{0}) = -0{,}07.$$

(IV kvadrant, jer je samo u tom kvadrantu sinus negativan, a kosinus pozitivan), a ako obje jednažbe kvadriramo, a zatim zbrojimo, imat ćemo:

$$A^2 = (1{,}52)^2 + (-0{,}10)^2 = 2{,}32,$$
$$A = \sqrt{2{,}32} = 1{,}52.$$

Uvrštenje vrijednosti dobivenih za A i α u $y = A \sin \left(\frac{\pi}{2} x + \alpha\right)$ daje traženi rezultat

$$y = 1{,}52 \sin \left(\frac{\pi}{2} x - 0{,}07\right)$$ (graf vidi na sl. 53).

5. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

$$y = a^x. \qquad (55)$$

Da ostanemo u realnom području i da dobijemo jednoznačnu funkciju, pretpostavljamo:

1) da je baza a realan pozitivan broj, jer za a negativan, npr. $a = -2$ i $x = \frac{1}{2}$, funkcija bi imala imaginarnu vrijednost: $y = (-2)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{-2} = \pm\ i\sqrt{2}$,

2) da y prima samo pozitivne vrijednosti npr. za $a = 4$ i $x = \frac{1}{2}$ imamo $y = 4^{\frac{1}{2}} = +\sqrt{4} = +2$.

Razlikuju se tri slučaja eksponencijalne funkcije:
1) baza $a > 1$, 2) baza $a = 1$, 3) baza $a < 1$.

Slika 56 prikazuje grafove funkcije $y = a^x$ za $a = 2$, $a = 1$ i $a = \frac{1}{2}$.

Računamo:

x	$y = 2^x$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

$y = 1^x = 1$ za sve konačne x.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Iz slike 56 i iz naših računa vidimo, da je eksponencijalna funkcija $y = a^x$ jednoznačna funkcija definirana za sve x. Za $a > 1$ funkcija raste od 0 do $+\infty$, a za $a < 1$ funkcija pada od $+\infty$ do 0, kada x raste od $-\infty$ do $+\infty$, a za $a = 1$ funkcija ima konstantnu vrijednost 1. Bez obzira na veličinu pozitivne baze a, funkcija je uvijek pozitivna i za $x = 0$ ima vrijednost 1.

Poseban slučaj:

Za $a = e = 2{,}71828\ldots$ dobije se

$$y = e^x. \tag{56}$$

To je prirodna eksponencijalna funkcija, koja se tako zove, jer se rast u prirodi često ravna prema eksponencijalnoj funkciji s bazom e, dok u slučaju pada ima e negativni eksponent:

$$y = e^{-x}. \tag{56a}$$

Iz slike 57, koja pokazuje tok obiju funkcija, vidimo da je:

Sl. 56.

Sl. 57.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0. \tag{57}$$

6. HIPERBOLNE FUNKCIJE

a Definicije hiperbolnih funkcija

Hiperbolne funkcije su funkcije, koje su sastavljene od prirodnih eksponencijalnih funkcija e^x i e^{-x} (vidi sl. 57).

Funkcija $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ zove se sinus hiperbolni x i simbolički se označuje sa $\operatorname{sh} x$, dakle

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x. \tag{58}$$

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ zove se kosinus hiperbolni x i označuje se s ch x, dakle

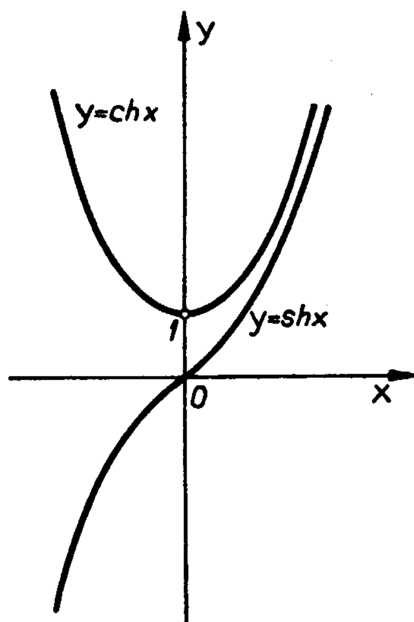
$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{58a}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \text{th}\, x \ (\text{tangens hiperbolni } x) \\ y &= \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\text{th}\, x} = \text{cth}\, x \ (\text{kotangens hiperbolni } x). \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

b) Promatranje pojedinih hiperbolnih funkcija

1) $y = \text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$y(-x) = \text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\text{sh}\, x = -y(x)$$



Sl. 58.

$y = \text{sh}\, x$ je liha funkcija.

$$y(0) = \text{sh}\, 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

sh x ima nultačku u ishodištu.

$$\lim_{x \to +\infty} \text{sh}\, x = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to +\infty} e^x - \lim_{x \to +\infty} e^{-x}\right] = +\infty$$

prema (57).

Kako je sh x liha funkcija, bit će s obzirom na simetriju:

$$\lim_{x \to -\infty} \text{sh}\, x = -\infty.$$

Slika 58 prikazuje tok funkcije. Iz te slike vidimo:

sh x je liha jednoznačna funkcija definirana za sve x. Funkcija raste od $-\infty$ do $+\infty$, kad x raste od $-\infty$ do $+\infty$, ima jedinu nultačku u ishodištu.

2) $y = \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$y(-x) = \text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}\, x = y(x)$$

$y = \text{ch}\, x$ je taka funkcija.

$$y(0) = \text{ch}\, 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \text{ch}\, x = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to +\infty} e^x + \lim_{x \to +\infty} e^{-x}\right] = +\infty \text{ prema } \quad (57)$$

Kako je ch x taka funkcija, bit će s obzirom na simetriju

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty.$$

Graf funkcije $y = \operatorname{ch} x$ (vidi sl. 58) zove se lančanica. Taj oblik (eventualno slično povećan ili umanjen) ima homogena teška nit, koja slobodno visi obješena o dvije jednako visoke tačke.

Iz slike 58 vidimo:

ch x je taka jednoznačna funkcija definirana za sve x. Funkcija pada od $+\infty$ do 1, kad x raste od $-\infty$ do 0, a dalje raste od 1 do $+\infty$, kad x raste od 0 do $+\infty$. Uvijek je $\operatorname{ch} x \geqq 1$.

Primijetimo još, da je uvijek

$$\operatorname{ch} x > \operatorname{sh} x,$$

jer se izrazi (58) za te funkcije razlikuju samo u predznaku člana e^{-x}, koji je uvijek pozitivan (vidi sl. 57), a taj član se kod ch x pribraja, a kod sh x oduzima (vidi sl. 58).

3) $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$y(-x) = \operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = -\operatorname{th} x = -y\ x)$$

$y = \operatorname{th} x$ je liha funkcija.

Kako je $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ bit će $\operatorname{th} x = 0$, kad je brojnik $\operatorname{sh} x = 0$, tj. za $x = 0$, dakle

$$x = 0 \quad \text{je nultačka th } x.$$

Kako je nazivnik $\operatorname{ch} x \geqq 1$, th x nema polova.

Pokažimo, da je $|\operatorname{th} x| < 1$.

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = (e^x - e^{-x}):(e^x + e^{-x}) = 1 - \frac{2\,e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ako to dijeljenje izvršimo.

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1 - 2\,\frac{\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}} = 1 \text{ prema (57).}$$

Kako je th x liha funkcija, bit će obzirom na simetriju

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1.$$

Iz slike 59 vidimo:

$\operatorname{th} x$ je jednoznačna liha funkcija, definirana za sve x. Funkcija raste od -1 do $+1$, kad x raste od $-\infty$ do $+\infty$. Uvijek je $|\operatorname{th} x| < 1$.

4) $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{1}{\operatorname{th} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

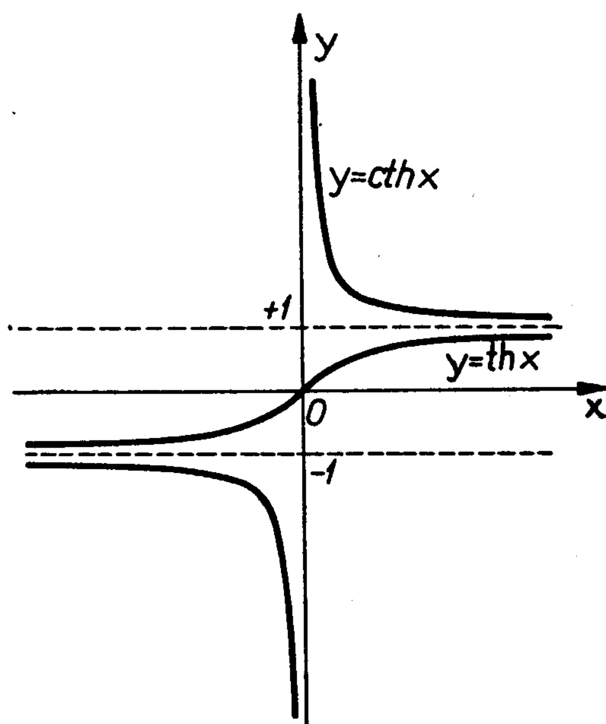
$$y(-x) = \operatorname{cth}(-x) = \frac{1}{\operatorname{th}(-x)} = \frac{1}{-\operatorname{th} x} = -\operatorname{cth} x = -y(x)$$

$y = \operatorname{cth} x$ je liha funkcija.

Iz $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ slijedi, da $\operatorname{cth} x$ nema nultačaka, jer je brojnik $\operatorname{ch} x \geqq 1$ i da $\operatorname{cth} x$ ima pol prvog reda za $x = 0$, jer je nazivink $\operatorname{sh} x = 0$ za $x = 0$

Kako je $\operatorname{cth} x = \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$, a $|\operatorname{th} x| < 1$, bit će

$$|\operatorname{cth} x| > 1.$$



Sl. 59.

U slici 59 prikazan je graf funkcije $y = \operatorname{cth} x$, iz kojega se vidi: $\operatorname{cth} x$ je jednoznačna liha funkcija definirana za sve x osim za $x = 0$, gdje ima pol 1. reda. Funkcija pada od -1 do $-\infty$, kad x raste od $-\infty$ do 0, a dalje opet pada od $+\infty$ do $+1$, kad x raste od 0 do $+\infty$. Uvijek je $|\operatorname{cth} x| > 1$.

c) Formule za hiperbolne funkcije

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Zbroj daje: $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$

Razlika daje $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$ (60)

Umnožak formula (60) daje:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \qquad (61)$$

Odatle:

$$\operatorname{ch} x = +\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$$
$$\operatorname{sh} x = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}. \qquad (62)$$

Dalje se mogu lako izvesti formule kako slijede:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$$
$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth}^2 x - 1 \qquad (63)$$

$$\operatorname{sh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2$$
$$\operatorname{ch}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2. \qquad (64)$$

Odatle:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x. \qquad (65)$$

Usporedi formule (61) do (65) sa sličnim formulama trigonometrije (vidi Repet. element. matem.) i obrati pažnju na razlike u predznacima.

d) Računanje vrijednosti hiperbolnih funkcija

Taj račun vrši se najjednostavnije pomoću formula (60):

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$
$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

Pokažimo ga na primjeru:

Neka se izračunaju na 5 decimala tačno vrijednosti svih hiperbolnih funkcija za $x = 1{,}12$.

Logaritmiranje formula (60) daje:

$$\log(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) = x \cdot \log e$$
$$\log(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = -x \cdot \log e.$$

Uvrstimo li ovamo $x = 1{,}12$ i $\log e = \log 2{,}71828 = M = 0{,}434294$ [vidi dalje formulu (74)], dobijemo:

$$\log(\text{ch } 1{,}12 + \text{sh } 1{,}12) = 1{,}12 \cdot 0{,}434294$$
$$\log(\text{ch } 1{,}12 - \text{sh } 1{,}12) = -1{,}12 \cdot 0{,}434294.$$

Izvršimo li množenje skraćenim načinom na 5 decimala tačno (vidi Repet. elem. matematike, I, § 13, 2.) ili logaritamskim putem, imat ćemo

$$\log(\text{ch } 1{,}12 + \text{sh } 1{,}12) = 0{,}48641$$
$$\log(\text{ch } 1{,}12 - \text{sh } 1{,}12) = -0{,}48641 = 0{,}51359 - 1,$$

a antilogaritmiranje daje

$$\begin{array}{ll|l} \text{ch } 1{,}12 + \text{sh } 1{,}12 & = 3{,}06486 & \pm \\ \text{ch } 1{,}12 - \text{sh } 1{,}12 & = 0{,}32628 & \\ \hline 2\,\text{ch } 1{,}12 & = 3{,}39114 & \\ 2\,\text{sh } 1{,}12 & = 2{,}73858 & \end{array}$$

Odatle:

$$\underline{\underline{\text{ch } 1{,}12 = 1{,}69557}}$$
$$\underline{\underline{\text{sh } 1{,}12 = 1{,}36929}}$$

$$\text{th } 1{,}2 = \frac{\text{sh } 1{,}12}{\text{ch } 1{,}12} = \frac{1{,}36929}{1{,}69557}$$

$$\text{cth } 1{,}2 = \frac{1}{\text{th } 1{,}12}$$

Odatle načinom skraćenog dijeljenje na 5 decimala tačno (vidi Repetitorij element. matematike I, § 13, 3.) ili logaritamskim putem dobijemo:

$$\underline{\underline{\text{th } 1{,}12 = 0{,}80757}}$$
$$\underline{\underline{\text{cth } 1{,}12 = 1{,}23829}}$$

Primijetimo da postoje tablice, u kojim su navedene vrijednosti hiperbolnih funkcija (vidi npr. „Hütte").

Paragraf koji slijedi dat će odgovor na pitanje, zašto se te funkcije zovu „hiperbolne".

§ 5.

PARAMETARSKI OBLIK JEDNADŽBE KRIVULJE

1. POJAM

Napisati jednadžbu krivulje u parametarskom obliku znači prikazati obje koordinate x i y svake tačke krivulje kao funkcije treće promjenljive t, koja se zove p a r a m e t a r.

Prema tome

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right| \quad t_1 \leqq t \leqq t_2 \qquad (66)$$

jest opća jednadžba krivulje u parametarskom obliku.

Obratni prijelaz, tj. prijelaz od parametarskog oblika na obični, vrši se tako, da se iz jednadžbi (66) ukloni parametar t, pa se dobije $y = y(x)$ ili $F(x, y) = 0$.

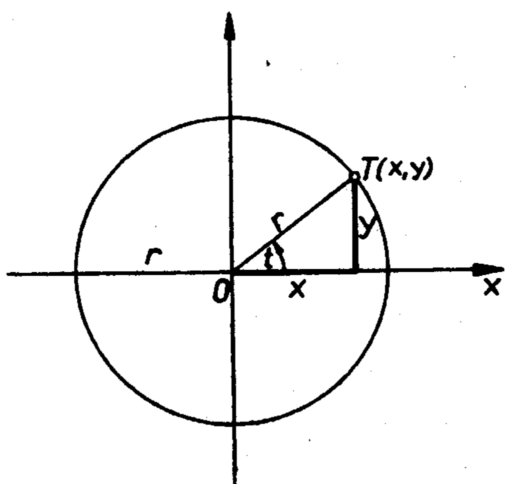
Obrati osobitu pažnju na parametarski oblik, jer ima veliku primjenu u tehnici, npr. u kinematici.

2. JEDNADŽBE NEKIH KRIVULJA U PARAMETARSKOM OBLIKU

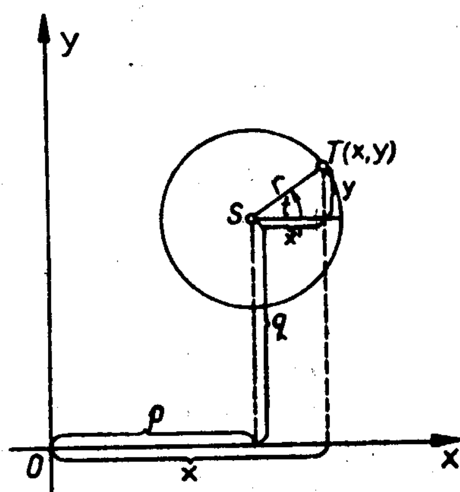
a) Jednadžba kružnice u parametarskom obliku

1. Središte je u ishodištu.

Prema slici 60:
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right| \quad 0 \leqq t < 2\pi. \qquad (67)$$



Sl. 60.



Sl. 61.

Kvadriramo li i zbrojimo obje gornje jednadžbe, dobit ćemo poznatu središnju jednadžbu kružnice:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

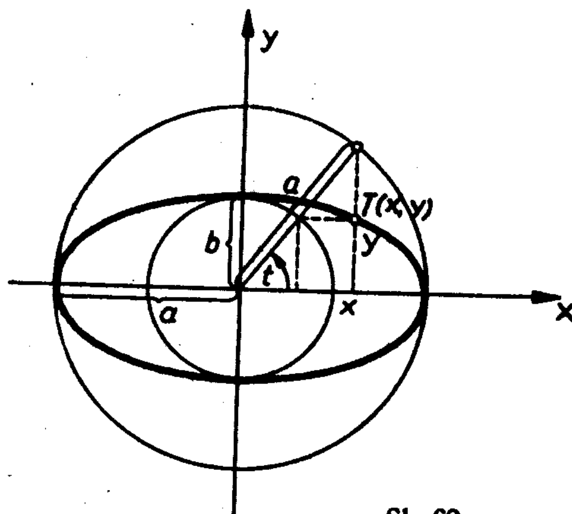
2. Središte je u tački $S(p, q)$. Prema slici 61:

$$x = p + x'$$

$$y = q + y'$$

ili

$$\left.\begin{aligned} x &= p + r\cos t \\ y &= q + r\sin t \end{aligned}\right| \quad 0 \leqq t < 2\pi. \qquad (67a)$$



Sl. 62.

b) Jednadžba elipse u parametarskom obliku

Prema slici 62, na kojoj je prikazana poznata konstrukcija tačke $T(x,y)$ elipse, imamo:

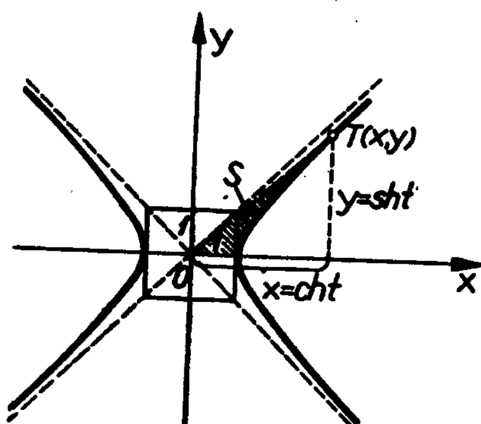
$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right| \quad 0 \leqq t < 2\pi. \qquad (68)$$

Podijelimo li prvu jednadžbu sa a, a drugu sa b, pa kvadriramo li i zbrojimo li tako dobivene jednadžbe, dobit ćemo središnju jednadžbu elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ako je središte elipse u tački $S(p, q)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= p + a\cos t \\ y &= q + b\sin t \end{aligned}\right| \quad 0 \leqq t < 2\pi. \qquad (68a)$$



Sl. 63.

c) Jednadžba hiperbole u parametarskom obliku

1. Istostrane: $a = b = 1$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} t \\ y &= \operatorname{sh} t \end{aligned}\right| \quad -\infty < t < +\infty, \qquad (69)$$

jer ako kvadriramo obje jednadžbe, pa od prve oduzmemo drugu, dobit ćemo obzirom na formulu (61) jednadžbu istostrane hiperbole $x^2 - y^2 = 1$.

Kako ćemo kasnije u integralnom računu vidjeti, $t = 2S$, tj. parametar t brojčano je jednak dvostrukoj površini sektora S istostrane hiperbole (vidi sl. 63).

Sada je jasno, zašto se te funkcije zovu **hiperbolne** funkcije: one imaju sličan odnos prema granama istostrane hiperbole, kao goniometrijske funkcije prema jediničnoj kružnici.

2. Raznostrane $a \neq b$:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \operatorname{ch} t \\ y &= b \operatorname{sh} t \end{aligned}\right| \quad -\infty < t < +\infty, \tag{69a}$$

jer uvrštenje tih jednadžbi u jednadžbu hiperbole

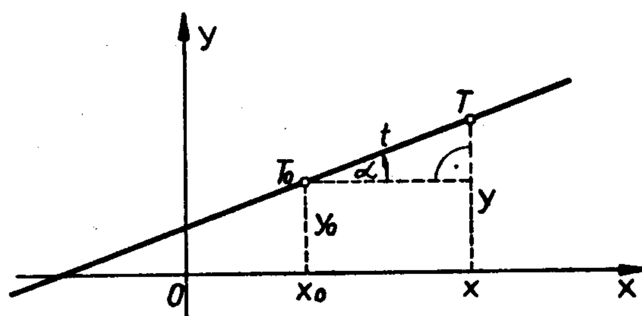
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

daje formulu (61):

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

d) Jednadžba pravca u parametarskom obliku

Pravac u ravnini posve je određen, ako je zadana tačka $T_0(x_0, y_0)$, kojom taj pravac prolazi, i kut α, što ga taj pravac zatvara s osi X.



Sl. 64.

Znamo, da jednadžbu zadanog pravca (ili općenito nekog geometrijskog lika) dobijemo tako, da uzmemo na pravcu tačku T po volji i napišemo relaciju, koja veže koordinate (x, y) te tačke T s veličinama, koje su zadane. Uzmimo, dakle, na zadanom pravcu tačku $T(x, y)$ po volji i označimo s t udaljenost te tačke od **zadane** tačke $T_0(x_0, y_0)$.

Kako je tačka T uzeta po volji, veličina t tj. udaljenost $T_0 T$ je promjenljiva veličina, tj. **parametar**, koji moramo mijenjati od $-\infty$ do $+\infty$, da dobijemo sve tačke pravca, jer svakoj drugoj po volji uzetoj tački pravca odgovara druga udaljenost t od zadane tačke T_0.

Prema slici 64:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot \cos\alpha \\ y &= y_0 + t \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right| \quad -\infty < t < +\infty.$$

To je jednadžba pravca u parametarskom obliku.

Iz slike 64. se neposredno razabire i geometrijsko značenje parametra t. Naime apsolutna vrijednost parametra t pridruženog nekoj tački $T(t)$ jednaka je udaljenosti tačke T od tačke T_0. Odavde onda i slijedi: ako su na pravcu dane dvije tačke $T_1(t_1)$ i $T_2(t_2)$ njihova je međusobna udaljenost jednaka $| t_2 - t_1 |$.

§ 6.

INVERZNE FUNKCIJE

1. POJAM

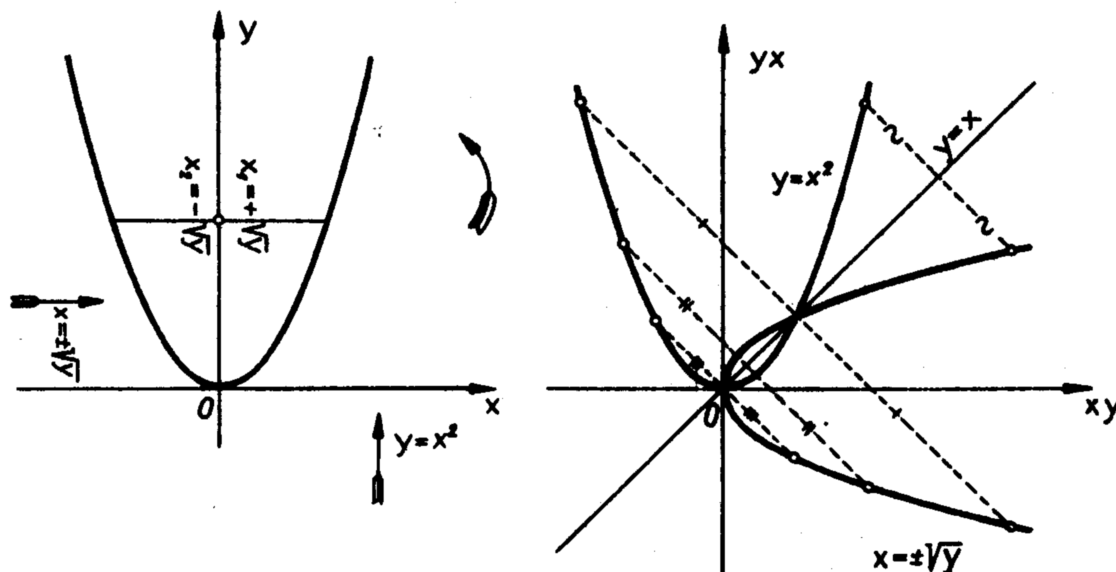
Ako u funkciji $y = y(x)$ zamijenimo uloge argumenta i funkcije, tj. x smatramo funkcijom a y argumentom, drugim riječima, ako riješimo jednadžbu $y = y(x)$ po x, dobit ćemo inverznu funkciju $x = x(y)$.

Npr.

Zadana funkcija: $y = x^2$.

Inverzna funkcija: $x = \pm\sqrt{y}$.

Inverzna funkcija je nova funkcija, jer svako svojstvo funkcije prelazi nakon inverzije u neko novo svojstvo. Kako se vidi iz gornjeg primjera, takost zadane funkcije $y = x^2$ prelazi u dvoznačnost inverzne funkcije $x = \pm\sqrt{y}$. Kasnije ćemo vidjeti, da periodska funkcija daje nakon inverzije beskonačno mnogoznačnu funkciju.



Sl. 65.

Graf inverzne funkcije može se dobiti iz grafa zadane funkcije na 2 načina:

1. okretanjem grafa zadane funkcije za 90^0 u smislu protivnom smislu kazaljke na satu;

2. zrcaljenjem grafa zadane funkcije i koordinatnog sustava na raspolovnici 1. i 3. kvadranta, pri čemu se os X zrcali u os Y, a os Y u os X. Slika 65 prikazuje oba načina konstrukcije funkcije $y = \pm\sqrt{x}$.

Primjedba. Označimo li, kao obično, argument s x a funkciju s y, tj. apscisnu os označimo s X a ordinatnu s Y, primit će inverzna funkcija $x = \pm\sqrt{y}$ oblik $y = \pm\sqrt{x}$. To znači da smo horizontalnoj osi dali prijašnju oznaku X, a vertikalnoj osi Y.

Jasno je, da se funkcija ne mijenja, ako se promijeni oznaka argumenta i funkcije. Npr.

$$y = x^2, \quad x = y^2, \quad u = v^2, \quad v = u^2$$

je ista funkcija različito označena, a njena inverzna funkcija različito označena bi bila:

$$x = \pm\sqrt{y}, \quad y = \pm\sqrt{x}, \quad v = \pm\sqrt{u}, \quad u = \pm\sqrt{v}.$$

3. Graf inverzne funkcije može se naravno konstruirati i neposredno računajući pojedine tačke krivulje.

2. POJEDINE INVERZNE FUNKCIJE

a) Ciklometrijske ili arkus-funkcije

To su inverzne funkcije od cirkularnih (goniometrijskih) funkcija.

1) $y = \text{Arc}\sin x$

Simbol $y = \sin x$ znači: y je sinus luka x.

Inverzno: x je luk, kojemu je sinus jednak y, a to simbolički pišemo ovako:

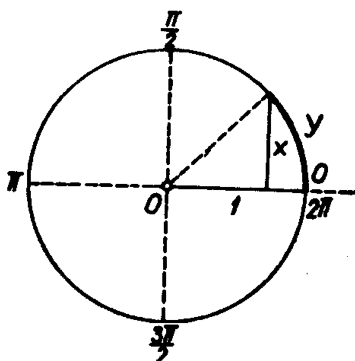
$$x = \text{Arc}\sin y \quad (x \text{ je arkus sinus } y)$$

ili ako zamijenimo nazive argumenta i funkcije, tj. mjesto x pišemo y, mjesto y uzimamo x, glasit će funkcija:

$$y = \text{Arc}\sin x,$$

x je vrijednost sinusa, y je pripadni luk.

Mi dakle zadajemo sada vrijednosti sinusa (x), a računamo pripadne lukove (y) (vidi sl. 66).



Sl. 66.

Da nacrtamo graf te inverzne funkcije, moramo najprije uočiti, da je funkcija definirana samo za $-1 \leq x \leq +1$, jer je x vrijednost sinusa. Stoga će pravci $x = -1$ i $x = +1$ (vidi sl. 67) omeđašiti onu prugu, izvan koje ne može ležati nijedna tačka grafa. Dalje ćemo na os Y nanijeti lučnu mjeru, tj. $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$ itd., jer je y luk. Sada računamo glavne tačke grafa:

Kada je sinus, tj. $x = 0$, pripadni luk

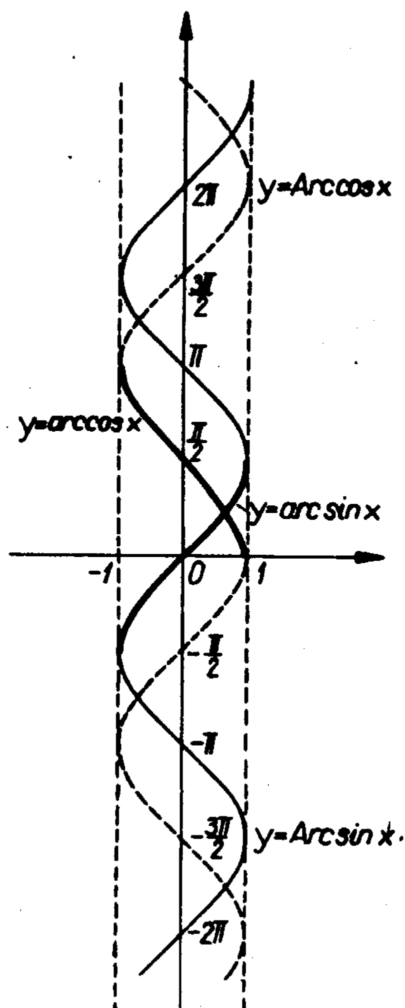
$$y = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \ldots$$
$$= \quad -\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots$$

Za $x = 1$
$$y = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$
$$= -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \ldots$$

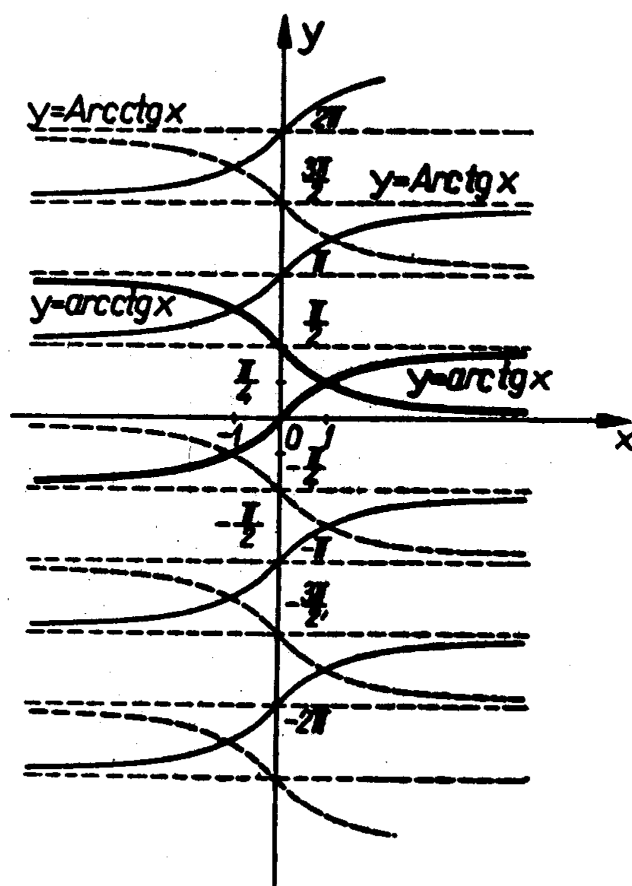
Za $x = -1$
$$y = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$$
$$= -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Vidimo, da je $y = \operatorname{Arc} \sin x$ beskonačno mnogoznačna funkcija definirana za $-1 \leq x \leq +1$.

U toj beskonačnoj mnogoznačnosti inverzne funkcije zrcali se periodičnost funkcije sinus.



Sl. 67.



Sl. 68.

Da se dobije jednoznačna funkcija, uzmimo dio krivulje i to od $y = -\frac{\pi}{2}$ do $y = +\frac{\pi}{2}$. Tako dobijemo glavne vrijednosti funkcije, koje se označuju s $\arcsin x$ (malo a!).

Glavna vrijednost $y = \arcsin x$ je jednoznačna liha funkcija definirana samo za $|x| \leq 1$.

Funkcija raste od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$, kad x raste od -1 do $+1$. (Vidi sl. 67).

2) $y = \text{Arc} \cos x$

To znači: y je luk, kojemu je kosinus jednak x.

Argument x je dakle vrijednost kosinusa, a funkcija y je pripadni luk.

Na slični način računa se i konstruira graf te funkcije, koji je prikazan na slici 67. Vidimo, da je $y = \text{Arc} \cos x$ beskonačno mnogoznačna funkcija definirana za $-1 \leq x \leq +1$. Jednoznačna funkcija, tj. glavna vrijednost, dobije se tako, da se uzme dio krivulje od $y = \pi$ do $y = 0$.

Glavna vrijednost $y = \arccos x$ je jednoznačna funkcija, definirana za $|x| \leq 1$. Funkcija pada od π do 0, kad x raste od -1 do $+1$ (vidi sl. 67).

Primijetimo, da grafove funkcija

$$y = \arcsin x \quad \text{i} \quad y = \arccos x$$

možemo također dobiti tako, da sinusoidu i kosinusoidu zrcalimo na pravcu $y = x$ uzevši prvu u intervalu od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$, a drugu od 0 do π.

3) $y = \text{Arc} \operatorname{tg} x$

To znači: y je luk, kojemu je tangens jednak x.

Vrijednost tangensa je dakle argument x, a pripadni luk je funkcija y. Kako tangens prima sve vrijednosti, funkcija je definirana za sve x od $-\infty$ do $+\infty$ (vidi sl. 69).

Kad je vrijednost tangensa, tj. $x = 0$, pripadni luk

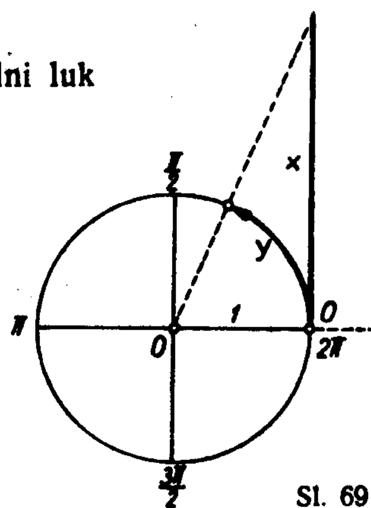
$$y = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \ldots$$
$$= -\pi, \; -2\pi, \ldots$$

Kad $x \to +\infty$, $y \to \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ (rastući)

$y \to -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \ldots$ (rastući).

Kad $x \to -\infty$, $y \to \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ (padajući)

$y \to -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \ldots$ (padajući).



Sl. 69.

S toga razloga vučemo u tačkama

$$y=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ldots \text{ i } y=-\frac{\pi}{2},-\frac{3\pi}{2},\ldots$$

pravce usporedne s osi X, koji će biti asimptote pojedinih grana traženog grafa (vidi sl. 68).

Uzmimo konačno u obzir, da je

$$\text{Arc tg } 1=\frac{\pi}{4}+k\pi, \text{ gdje je } k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots$$

Vidimo, da je $y=\text{Arc tg } x$ beskonačno mnogoznačna funkcija definirana za sve x. Kao glavna vrijednost uzima se ona grana, koja prolazi kroz ishodište.

Glavna vrijednost $y=\text{arc tg } x$ je jednoznačna liha funkcija definirana za sve x. Funkcija raste od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$, kad x raste od $-\infty$ do $+\infty$ (vidi sl. 68).

4) $y=$ Arc ctg x

To znači: y je luk, kojemu je kotangens jednak x.

Graf te funkcije konstruira se na sličan način, a prikazan je na sl. 68. Vidimo, da je $y=\text{Arc ctg } x$ beskonačno mnogoznačna funkcija definirana za sve x. Kao glavna vrijednost uzima se ona grana koja leži između $y=\pi$ i $y=0$.

Glavna vrijednost $y=\text{arc ctg } x$ je jednoznačna funkcija definirana za sve x. Funkcija pada od π do 0, kad x raste od $-\infty$ do $+\infty$. Opažamo, da se grafovi funkcija $y=\text{arc tg } x$ i $y=\text{arc ctg } x$ sijeku u tački $T\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$, jer je $\text{arc tg } 1=\text{arc ctg } 1=\frac{\pi}{4}=\text{arc } 45^0$ (vidi sl. 68).

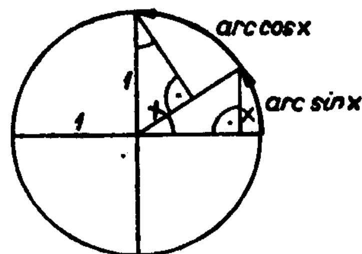
5) Formule za arkus-funkcije

Iz slike 70 slijedi:

$$\text{arc sin } x+\text{arc cos } x=\frac{\pi}{2}. \qquad (70)$$

Na isti način može se pokazati, da je također

$$\text{arc tg } x+\text{arc ctg } x=\frac{\pi}{2}. \qquad (71)$$



Sl. 70.

Npr. $\text{arc sin}\frac{1}{2}+\text{arc cos}\frac{1}{2}=\text{arc } 30^0+\text{arc } 60^0=\text{arc } 90^0=\frac{\pi}{2}.$

Teoremi adicije za arkus - funkcije:

$$\text{arc sin}\, x_1 + \text{arc sin}\, x_2 = \text{arc sin}\, (x_1 \sqrt{1 - x_2^2} + x_2 \sqrt{1 - x_1^2}) \tag{72}$$

$$\text{arc cos}\, x_1 + \text{arc cos}\, x_2 = \text{arc cos}\, (x_1 x_2 - \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}) \tag{73}$$

Primjer.

$$\text{arc sin}\frac{1}{2} + \text{arc sin}\frac{\sqrt{3}}{2} = ?$$

Prema (72) imamo: $\text{arc sin}\frac{1}{2} + \text{arc sin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{arc sin}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{3}{4}} + \right.$

$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right) = \text{arc sin}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = \text{arc sin}\, 1 = \frac{\pi}{2}\cdot$

Pokus:

$$\text{arc sin}\frac{1}{2} = \text{arc}\ 30^0$$

$$\text{arc sin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{arc}\ 60^0 \qquad +$$

$$\text{arc sin}\frac{1}{2} + \text{arc sin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{arc}\ 90^0 = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Spomenimo još da je

$$\begin{aligned} \text{arc sin}\,(\sin x) &= x \\ \text{arc cos}\,(\cos x) &= x \\ &\text{itd.,} \end{aligned} \tag{73a}$$

jer luk, kojemu je sinus jednak sinusu od luka x, jest x.

Također je

$$\begin{aligned} \text{arc sec}\, x &= \text{arc cos}\left(\frac{1}{x}\right) \\ \text{arc cosec}\, x &= \text{arc sin}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \tag{73b}$$

jer je $\sec y = \frac{1}{\cos y} = x$, a $\text{cosec}\, y = \frac{1}{\sin y} = x$. (Izvedi te formule!)

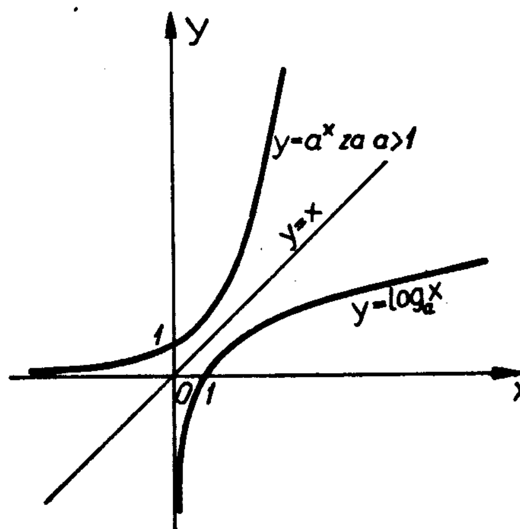
b) Logaritamska funkcija

1) Pojam

Logaritamska funkcija je inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $y = a^x$ za $a > 1$.

Prema definiciji logaritma:

logaritam je eksponent kojim treba potencirati bazu da se dobije zadani broj, glasit će funkcija $y = a^x$ inverzno:



Sl. 71.

$$x = \log_a y$$

ili, ako s x označimo argument a s y funkciju:

$$y = \log_a x.$$

(Vidi također Repet. element. matematike, I, § 13, 1).

Logaritamska funkcija je definirana samo za pozitivne x, jer je x vrijednost eksponencijalne funkcije, koja je uvijek pozitivna. Graf logaritamske funkcije nacrtajmo tako, da zrcalimo na pravcu $y=x$ graf eksponencijalne funkcije a^x s bazom $a > 1$.

Iz slike 71 vidimo:

Logaritamska funkcija $y = \log_a x$ je jednoznačna funkcija definirana samo za pozitivne x. Funkcija raste od $-\infty$ do $+\infty$, kad x raste od 0 do $+\infty$, pri čemu je za $x < 1$ negativna, a za $x > 1$ pozitivna. Ima jedinu nultačku $x = 1$.

Prema tome su npr. $\log \sin x$ i $\log \cos x$ uvijek negativni, odnosno 0, jer su $|\sin x|$ i $|\cos x| \leqq 1$.

2) Logaritamski sustavi

1. Dekadski i prirodni logaritmi

Svakom realnom pozitivnom broju a odgovara jedan logaritamski sustav s tim brojem a kao bazom, pri čemu je uvijek $\log_a a = 1$, jer je samo $a^1 = a$.

Praktički se primjenjuju samo 2 sustava logaritama.

1) baza $a = 10$. To su dekadski ili obični ili Briggsovi logaritmi. Oznaka je log (bez oznake baze);

2) baza $a = e = 2{,}71828\ldots$ To su prirodni ili hiperbolni ili Neperovi logaritmi. Oznaka je ln (logarithmus naturalis).

2. Veza između dekadskih i prirodnih logaritama

Logaritmiramo li isti broj x po bazi 10, a iza toga po bazi e, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} \log x &= y_1 \\ \ln x &= y_2 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

a odatle prema definiciji logaritma možemo pisati:

$$10^{y_1} = x$$
$$e^{y_2} = x.$$

Izjednačenje lijevih strana daje:

$$10^{y_1} = e^{y_2},$$

a logaritmirajući te jednakosti po bazi 10 dobijemo:

$$y_1 \log 10 = y_2 \log e.$$

Uvrstimo li jednakosti (a) i uzmemo li u obzir da je $\log 10 = 1$, dobit ćemo:

$$\log x = \ln x \cdot \log e. \quad \text{(b)}$$

$$\log e = \log 2{,}71828\ldots = M = 0{,}434294\ldots \quad (74)$$

zove se *modul Briggsovih logaritama.*

Prema tome:

$$\log x = M \cdot \ln x. \quad (75)$$

Odatle:

$$\ln x = \frac{\log x}{M} = \frac{1}{M} \cdot \log x. \quad (76)$$

Iz formula (75) i (76) slijedi, da se dekadski logaritam dobije iz prirodnog tako, da se posljednji pomnoži modulom M, dok se prirodni logaritam računa tako, da se izvađeni iz tablice dekadski logaritam podijeli s M ili pomnoži s $\frac{1}{M}$.

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{0{,}43429} = 2{,}302585\ldots \quad (77)$$

To je *modul Neperovih logaritama.*

Uvrštenje $x = 10$ u (76) daje: $\ln 10 = \frac{1}{M}$. (77a)

Umnožak $\log e = M$ i $\ln 10 = \frac{1}{M}$ daje:

$$\log e \cdot \ln 10 = 1.$$

Taj izraz vrijedi i općenito, tj.

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1 \qquad \text{ili}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \quad (78)$$

Kako je $e < 10$, bit će $|\ln x| > |\log x|$, što se vidi i iz slike 72.

Primjeri.

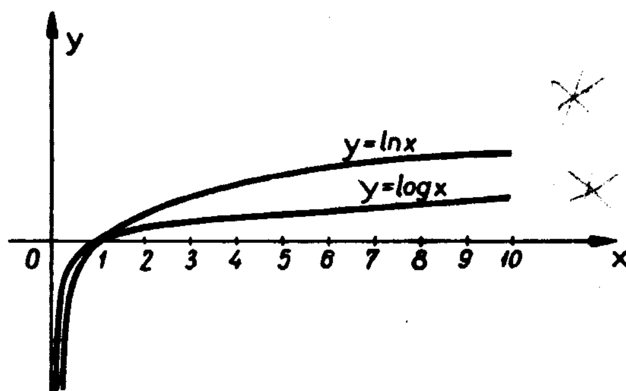
1. $\ln x = 4{,}34381$, $x = ?$

Prema (75) i (74):

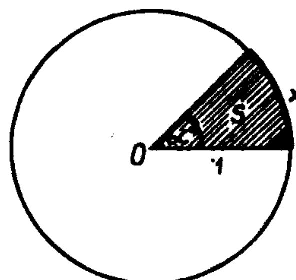
$$\log x = M \cdot \ln x = 0{,}434294 \cdot 4{,}34381.$$

Odatle načinom skraćenog množenja (vidi Repet. element. matematike) ili logaritamskim putem dobijemo na 5 decimala tačno:

$$\log x = 1{,}88649, \text{ a odatle je } \underline{x = 77.}$$



Sl. 72.



Sl. 73.

2. $\ln 0{,}1259 = ?$
Prema (76) i (74):

$$\ln 0{,}1259 = \frac{\log 0{,}1259}{M} = \frac{0{,}10003 - 1}{0{,}434294} = \frac{-0{,}89997}{0{,}434294}.$$

Odatle načinom skraćenog dijeljenja ili logaritamskim putem dobijemo na 5 decimala tačno:

$$\ln 0{,}1259 = -0{,}20723 = \underline{0{,}79277 - 1.}$$

Drugi način. Prema (76) i (77):

$$\ln 0{,}1259 = \frac{1}{M} \cdot \log 0{,}1259 = \frac{1}{M}(0{,}10003 - 1) = -2{,}302585 \cdot 0{,}89997 =$$

$$= -0{,}20723 = \underline{0{,}79277 - 1.}$$

c) Area — funkcije

1) Pojam

To su inverzne funkcije od hiperbolnih funkcija. Argument x hiperbolnih funkcija može se smatrati kao da je površina, tj. area, jer je brojno jednak dvostrukoj površini sektora hiperbole (vidi pređašnji paragraf). Primijetimo, da se i argument x goniometrijskih funkcija može uzeti kao da je dvostruka površina sektora, koji pripada luku x u jediničnoj kružnici, jer je prema slici 73, i obzirom na formule (37) i (38):

$$S = \frac{\pi \cdot r^2}{360^0} \cdot \alpha^0 = \frac{\pi \cdot 1^2}{360^0} \cdot \alpha^0 = \frac{\pi \cdot \alpha^0}{180^0 \cdot 2} = \frac{\alpha^0}{2} \cdot \frac{1}{\rho^0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^0}{\rho^0} = \frac{1}{2}\, x,$$

a odatle je $\qquad x = 2S.$

2) Pojedine Area-funkcije

1. $y = \operatorname{sh} x$

znači: y je sinus hiperbolni od površine (area) x. Inverzno: x je površina (area), kojoj je sinus hiperbolni jednak y, a to pišemo simbolički ovako:

$$x = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} x$$

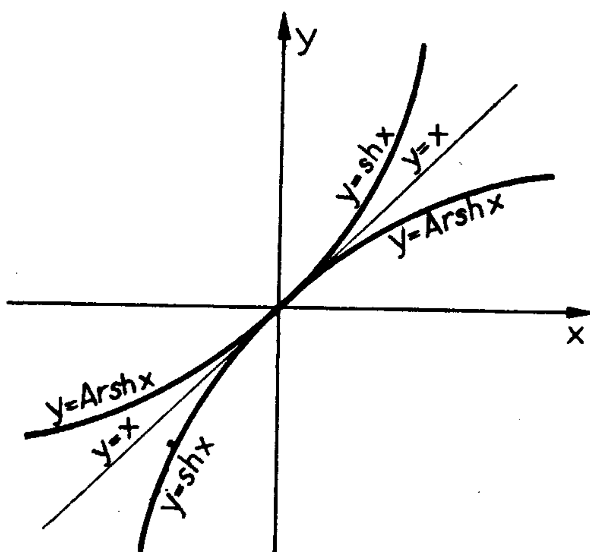
ili, ako funkciju označimo kao obično s y, a argument s x, glasit će funkcija:

$y = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} x$ (čitaj: y je area sinus hiperbolni x)

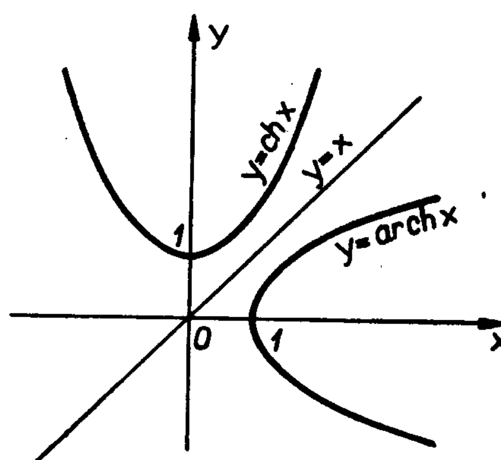
x je dakle vrijednost sinusa hiperbolnog, a

y — pripadna vrijednost površine.

Graf funkcije dobit ćemo zrcaljenjem grafa $\operatorname{sh} x$ na pravcu $y = x$.



Sl. 74.



Sl. 75.

Iz slike 74 vidimo:

$y = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} x$ je jednoznačna liha funkcija definirana za sve y. Funkcija raste od $-\infty$ do $+\infty$, kad x raste od $-\infty$ do $+\infty$. Ima jednu nultačku $x = 0$.

2. $y = \operatorname{ch} x$,

tj. y je kosinus hiperbolni od površine x. Inverzno: x je površina (area), kojoj je kosinus hiperbolni jednak y.

Isto simbolički:

$$x = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} y$$

ili ako zamijenimo oznake za argument ili funkciju:

$$y = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x.$$

Kako je x vrijednost kosinusa hiperbolnog, koji, kako znamo, prima vrijednosti, koje su $\geqq 1$, funkcija je definirana samo za $x \geqq 1$.

Iz slike 75 slijedi:

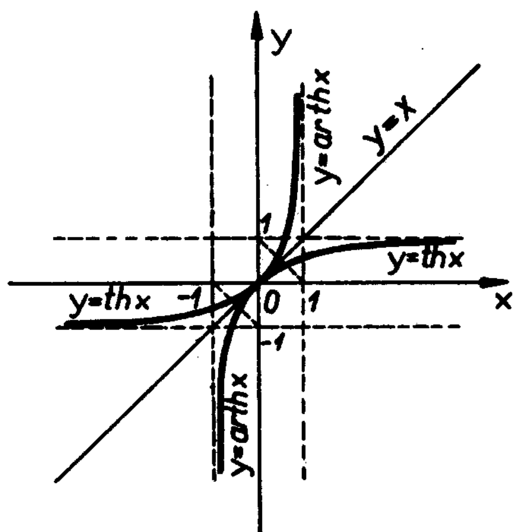
$y = \text{Arch}\, x$ je dvoznačna funkcija definirana samo za $x \geqq 1$. Funkcija raste od 0 do $+\infty$, odnosno pada od 0 do $-\infty$ kad x raste od 1 do $+\infty$, ima jednu nultačku $x = 1$.

3. $y = \text{Arth}\, x$.

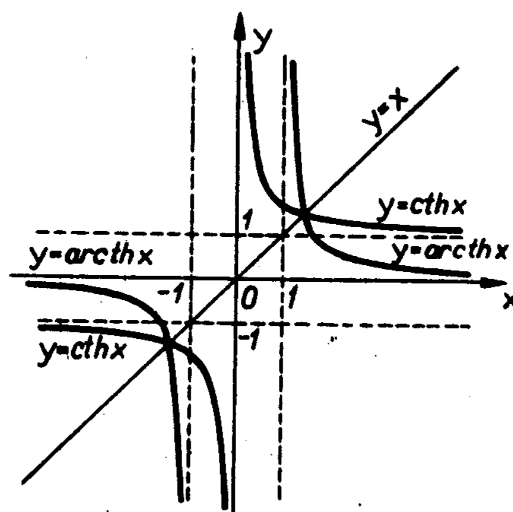
Znamo, da tangens hiperbolni prima vrijednost od -1 do $+1$, stoga je inverzna funkcija definirana za $-1 < x < +1$. Pri zrcaljenju grafa tangensa hiperbolnog zrcalit ćemo najprije pravce $y = -1$ i $y = +1$, između kojih leži graf te funkcije; oni se zrcale u pravce $x = -1$ i $x = +1$.

Iz slike 76 vidimo:

$y = \text{Arth}\, x$ je jednoznačna liha funkcija definirana samo za $|x| < 1$. Funkcija raste od $-\infty$ do $+\infty$ kad x raste od -1 do $+1$, ima jednu nultačku $x = 0$.



Sl. 76.



Sl. 77.

4. $y = \text{Arcth}\, x$.

Kako je kotangens hiperbolni po apsolutnoj vrijednosti uvijek veći od 1, inverzna funkcija je definirana samo za $|x| > 1$.

Iz slike 77 slijedi:

$y = \text{Arcth}\, x$ je jednoznačna liha funkcija definirana samo za $|x| > 1$. Funkcija pada od 0 do $-\infty$ kad x raste od $-\infty$ do -1, a dalje opet pada od $+\infty$ do 0 kada x raste od $+1$ do $+\infty$

3) Veza Area-funkcija s prirodnim logaritmima

1. $y = \operatorname{Ar sh} x$ ili

$$x = \operatorname{sh} y, \text{ a prema (58):}$$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Lijevu i desnu stranu te jednakosti pomnožimo sa $2e^y$:

$$2xe^y = e^{2y} - 1$$

ili

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Stavimo: $e^y = z$, tada je $e^{2y} = z^2$.

Dobijemo: $$z^2 - 2xz - 1 = 0.$$

Odatle: $$z = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

ili

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Uvijek je $e^y > 0$, a $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$, jer je $x < \sqrt{x^2 + 1}$, pa moramo negativni predznak ispred korijena izostaviti, jer mu ne bi odgovarala nikakva realna vrijednost y. Dobijemo:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}..$$

Odatle po definiciji logaritma slijedi, da je

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

ili

$$\operatorname{Ar sh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}). \qquad (79)$$

2. $y = \operatorname{Ar ch} x$.

Postupajući na isti način, dobijemo:

$$\operatorname{Ar ch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}). \qquad (80)$$

U tom slučaju treba sačuvati oba predznaka ispred korijena, jer je $x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$. U drugu ruku $\operatorname{Ar ch} x$ je dvoznačna funkcija, pa mora imati za svaki x dvije vrijednosti za y.

Iz formule (80) vidi se dalje, da je funkcija $\operatorname{Ar ch} x$ definirana samo za $x \geqq 1$, jer bi razlika $x^2 - 1$ bila za $x < 1$ negativna, pa bi $\sqrt{x^2 - 1}$ imao imaginarnu vrijednost.

3. $y = \operatorname{Ar th} x$ ili

$$x = \operatorname{th} y, \text{ a prema (59):}$$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}.$$

Množenje brojnika i nazivnika desne strane s e^y daje:

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}, \quad \text{a odatle}$$

$$x e^{2y} + x = e^{2y} - 1,$$

ili

$$(x - 1) e^{2y} = -1 - x,$$

ili

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}, \quad \text{a odatle je } e^y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}.$$

Logaritmiramo li lijevu i desnu stranu po osnovki e, dobijemo uzevši u obzir da je $y = \operatorname{Ar\,th} x$

$$\operatorname{Ar\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}. \qquad (81)$$

Vidimo, da je funkcija $\operatorname{Ar\,th} x$ definirana samo za $|x| < 1$, jer za $|x| > 1$ razlomak $\frac{1 + x}{1 - x}$ postaje negativan, pa $\ln \frac{1 + x}{1 - x}$ nema tada realnog značenja.

4. $y = \operatorname{Ar\,cth} x$.

Postupajući na slični način, dobijemo:

$$\operatorname{Ar\,cth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}. \qquad (82)$$

Vidimo, da je funkcija $\operatorname{Ar\,cth} x$ definirana za $|x| > 1$, jer razlomak $\frac{x + 1}{x - 1}$ postaje za $x < 1$ negativan.

Primijetimo, da se izrazi $\operatorname{Ar\,sh} x$ i $\operatorname{Ar\,ch} x$ itd. rijetko upotrebljavaju, već se area-funkcije obično pišu u gore izvedenim logaritamskim oblicima.

4) Računanje Area-funkcija

Vrši se pomoću formule (79) do (82) uklj.

Primjer. Neka se izračuna $\operatorname{Ar\,sh} 5$ na 5 decimala tačno.

Prema (79):

$$\operatorname{Ar\,sh} 5 = \ln (5 + \sqrt{1 + 5^2}) = \ln (5 + \sqrt{26}) = \ln (5 + 5{,}0990) =$$

$$= \ln 10{,}099 = \frac{1}{M} \cdot \log 10{,}099 = 2{,}302585 \cdot 1{,}00428 = 2{,}31244.$$

(Vidi skraćeno množenje u Repet. element. matematike).

$$\underline{\operatorname{Ar\,sh} 5 = 2{,}31244.}$$

Na isti način računaju se vrijednosti ostalih area-funkcija.

5) Neki odnosi među Area-funkcijama

$$\text{Ar sh}\, x = \text{Ar th}\, \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \text{Ar cth}\, \frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

$$\text{Ar sh}\, x = \begin{cases} \text{Ar ch}\, \sqrt{x^2+1}, \text{ za } x > 0 \\ -\text{Ar ch}\, \sqrt{x^2+1}, \text{ za } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{Ar ch}\, x = \pm\, \text{Ar sh}\, \sqrt{x^2-1} = \pm\, \text{Ar th}\, \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \pm\, \text{Ar cth}\, \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\text{Ar th}\, x = \text{Ar sh}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Ar cth}\, \frac{1}{x}$$

$$\text{Ar th}\, x = \begin{cases} \text{Ar ch}\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ za } x > 0 \\ -\text{Ar ch}\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ za } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{Ar cth}\, x = \text{Ar sh}\, \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Ar th}\, \frac{1}{x},$$

$$\text{Ar cth}\, x = \begin{cases} \text{Ar ch}\, \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ za } x > 0 \\ -\text{Ar ch}\, \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ za } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{Ar sh}\, x \pm \text{Ar sh}\, y = \text{Ar sh}\, (x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}),$$

$$\text{Ar ch}\, x \pm \text{Ar ch}\, y = \text{Ar ch}\, (xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}),$$

$$\text{Ar th}\, x \pm \text{Ar th}\, y = \text{Ar th}\, \frac{x \pm y}{1 \pm xy}$$

§ 7.

GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) FUNKCIJE

Funkcija $f(x)$ ima za limes određen konačan broj C, kad x teži prema a, ako se apsolutna veličina razlike između C i $f(x)$ tj. $|C - f(x)|$ može načiniti po volji malenom, čim se x uzme dovoljno blizu a.

Isto simbolički:

$\lim f(x) = C$, ako je

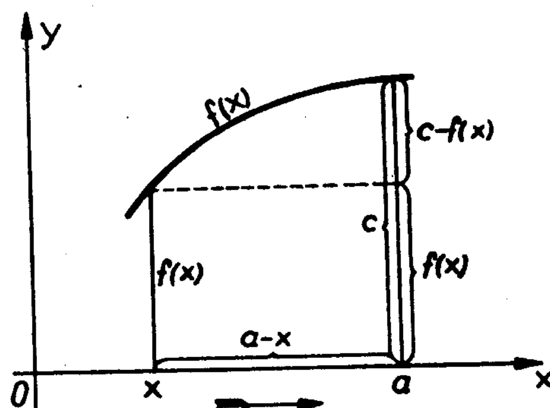
$|C - f(x)| < \varepsilon$, čim je

$|a - x| < \delta(\varepsilon)$, (83)

$< \varepsilon$ znači: „po volji malena",

$< \delta$ znači: „dovoljno malena",

$\delta(\varepsilon)$ znači, da δ ovisi o zadanom po volji malenom broju ε.



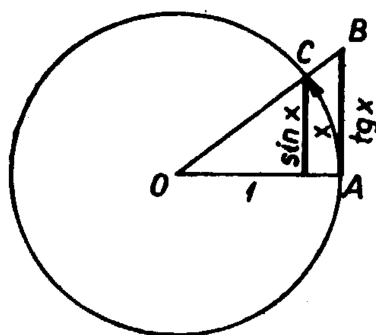
Sl. 78.

Dokažimo nekoliko limesa funikcija.

1. Tvrdnja:

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

Pazi! Jedno je $\lim\limits_{x \to 0} \sin x$, a drugo je $\sin 0 = 0$. To se podudara samo za neprekinutu funkciju (vidi slijedeći paragraf).



Sl. 79.

Dokaz: Prema (83):

$$|C - f(x)| = |0 - \sin x| = |\sin x|.$$

Prema slici 79:

$$\sin x < x$$

ili $\quad |\sin x| < |x|. \quad$ (84)

Dakle $\quad |0 - \sin x| < |x|, \quad$ (a)

a kako $x \to 0$ bit će $|x| < \varepsilon$, tj. po volji malen.

Stoga je prema (a) i $|0 - \sin x| < \varepsilon$, čime je tvrdnja dokazana, tj. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

2. Tvrdnja: $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

Dokaz prema (83):

$|1 - \cos x| =$ prema poznatoj trigonometrijskoj formuli (vidi Repet. element. matematike III, § 8) $= \left|2 \sin^2 \frac{x}{2}\right| = 2 \left|\sin^2 \frac{x}{2}\right|$.

Prema (84): $\quad \left|\sin \frac{x}{2}\right| < \left|\frac{x}{2}\right|$, a dakle i $\left|\sin^2 \frac{x}{2}\right| < \left|\frac{x^2}{4}\right|$.

Prema tome je $|1 - \cos x| < 2 \cdot \frac{|x|^2}{4}$, ili $|1 - \cos x| < \frac{|x|^2}{2}$, (a)

a kako $x \to 0$, bit će $\frac{|x|^2}{2} < \varepsilon$, pa je prema (a) i $|1 - \cos x| < \varepsilon$, a dakle prema (83)

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1. \qquad (85)$$

3. Tvrdnja: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

U tom slučaju ne možemo provesti dokaz navedene tvrdnje na temelju definicije limesa funkcije (83), već moramo postupati na drugi način.

a) Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tj. luk x leži u prvom kvadrantu.

Prema slici (79) $\sin x < x$, dok je $x < \operatorname{tg} x$, jer je pl. $\triangle OAB = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, a pl. sektora $OAC = \frac{1 \cdot x}{2} = \frac{x}{2}$. Kako je ploština sektora samo dio ploštine trokuta, bit će $x < \operatorname{tg} x$.

Imamo, dakle:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad | : \sin x > 0 \text{ (1. kvadrant)}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Recipročno: $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$, ili $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$

Prema (85): $\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$

$\frac{\sin x}{x}$ zatvorili smo između $\cos x$ (koji teži prema *1*) *i 1, dakle*

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ili $\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

($x \to +0$ znači, da $x \to 0$ pozitivnim vrijednostima, tj. $x \to 0$ idući prema nuli iz prvog kvadranta).

b) Neka je $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, tj. luk x leži u četvrtom kvadrantu.

$y = \frac{\sin x}{x}$ je taka funkcija, jer je

$$y(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = y(x),$$

pa je $\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1$, jer je taka funkcija simetrična obzirom na os Y.

Dokazali smo dakle, da je

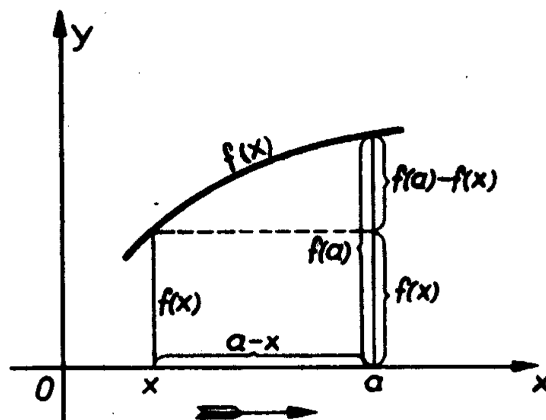
$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (86)$$

§ 8.

NEPREKINUTOST ILI KONTINUITET FUNKCIJA

1. POJAM NEPREKINUTOSTI FUNKCIJE

Gledajući na neprekinutu crtu grafova mnogih funkcija, kao npr. $P_n(x)$, $\sin x$, $\cos x$ itd., ne sumnjamo, da su te funkcije neprekinute. Isto tako jasno vidimo, da je npr. funkcija $\operatorname{tg} x$ prekinuta za $x = \frac{\pi}{2}$ vidi sl. 49). Međutim, ima mnogo slučajeva, kad nas zorno gledanje napušta, pa je važno tačno definirati pojam neprekinutosti funkcije, koji je od velikog značenja u višoj matematici.



Sl. 80.

Rekli smo da je prema (83) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = C$, ako je $|C - f(x)| < \varepsilon$, čim je $|a - x| < \delta(\varepsilon)$.

Ako je vrijednost C, kojoj teži funkcija, kad x teži prema a, baš jednaka vrijednosti funkcije za $x = a$, tj. $C = f(a)$, kaže se da je funkcija $f(x)$ neprekinuta ili kontinuirana za $x = a$.

Prema tome funkcija $f(x)$ neprekinuta je za $x = a$, ako teži svojoj vrijednosti u $x = a$, tj. teži prema $f(a)$, kad x teži prema a, dakle ako je

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{87}$$

Uvrstimo li u (83) $C = f(x)$, dobit ćemo drugu definiciju neprekinutosti funkcije $f(x)$ za $x = a$:

$$|f(a) - f(x)| < \varepsilon, \text{ čim je } |a - x| < \delta(\varepsilon). \tag{87a}$$

Može se neprekinutost funkcije za $x = a$ izraziti i ovako:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x), \tag{87b}$$

jer je $\lim\limits_{x \to a} x = a$, pa je $f(\lim\limits_{x \to a} x) = f(a)$.

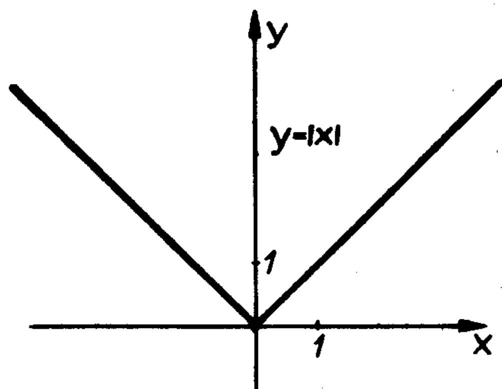
Formula (87b) kazuje, da je za neprekinutu funkciju limes funkcije jednak funkciji limesa njena argumenta.

Primijetimo, ako je funkcija neprekinuta u svim tačkama intervala, u kojem je definirana, ona se jednostavno zove neprekinuta funkcija.

Iz definicije neprekinutosti funkcije slijedi, da je funkcija $f(x)$ neprekinuta za $x = a$, ako su ispunjena sva četiri uvjeta, koja slijede:

1) da postoji limes s desna, tj. $\lim f(x)$ = konačan određen broj $= L_d$,
2) da postoji limes s lijeva, tj. $\lim f(x)$ = konačan određen broj $= L_l$,
3) da su oba limesa jednaka, tj. $L_d = L_l$,
4) da je zajednička vrijednost tih limesa baš jednaka vrijednosti funkcije u $x = a$, tj. $L_d = L_l = f(a)$.

Iz toga razloga slijedi, da je funkcija prekinuta ili diskontinuirana u svim tim tačkama u kojim teži u beskonačnost, tj. u polovima. Prema tome je npr. razlomljena racionalna funkcija prekinuta u nultačkama nazivnika, $\operatorname{ctg} x$ za $x = k\pi$, $\operatorname{tg} x$ za $x = \frac{\pi}{2}\ 2k + 1)$ itd.



Sl. 81.

Primjeri:

1. Je li funkcija $y = |x|$ neprekinuta i za $x = 0$?

Prema slici 81:

$$L_d = \lim_{x \to +0} |x| = 0,$$
$$L_l = \lim_{x \to -0} |x| = 0,$$
$$L_d = L_l = 0.$$
$$y(0) = |0| = 0 = L_d = L_l.$$

Sva su 4 uvjeta ispunjena, funkcija je i za $x = 0$ neprekinuta.

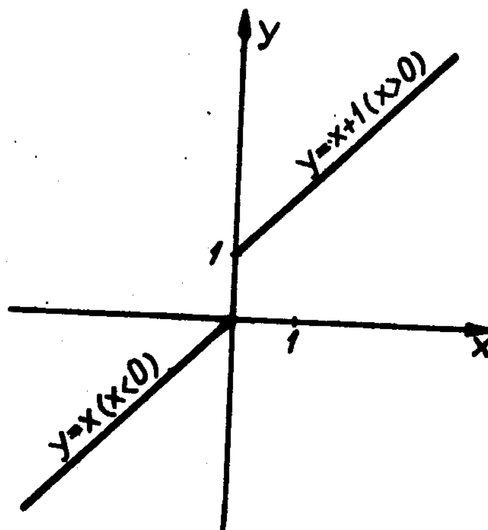
2. Je li funkcija $\begin{cases} y = x & \text{za } x < 0 \\ y = x + 1 & \text{za } x > 0 \end{cases}$ neprekinuta za $x = 0$?

Kako vidimo, funkcija je zadana s dva izraza.

Prema sl. 82:

$$L_d = +1,$$
$$L_l = 0,$$
$$L_d \neq L_l.$$

Funkcija ima limese i s desne i s lijeve strane, ali ti su limesi različiti, pa je funkcija za $x = 0$ prekinuta. To je tačka diskontinuiteta funkcije prve vrste.



Sl. 82.

3. Je li funkcija $y = \sin \frac{1}{x}$ neprekinuta za $x = 0$?

$L_d = \lim_{x \to +0} \sin \frac{1}{x}$ ne postoji, jer kad

$x \to +0$, $\frac{1}{x} \to +\infty$, a sinus oscilira bez kraja i konca između -1 i $+1$ ne teži nikakvoj određenoj graničnoj vrijednosti.

$L_1 = \lim\limits_{x \to -0} \sin \frac{1}{x}$ ne postoji s istog razloga.

Funkcija $y = \sin \frac{1}{x}$ nema za $x = 0$ ni limesa s desna, niti limesa s lijeva, ona je dakle u ishodištu prekinuta. To je tzv. **tačka diskontinuiteta funkcije druge vrste.**

2. TEOREM O NEPREKINUTOSTI FUNKCIJA. NEPREKINUTOST CIJELE I RAZLOMLJENE RACIONALNE FUNKCIJE

Zbroj, razlika, umnožak i kvocijent dviju neprekinutih funkcija opet je neprekinuta funkcija. Kod kvocijenta se pretpostavlja, da je nazivnik različit od nule.

Iz toga teorema slijedi, da je polinom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ neprekinuta funkcija za sve konačne x, jer je funkcija $y = x$ neprekinuta po smislu, dakle su prema teoremu neprekinute funkcije i pojedini članovi polinoma pa i njihov zbroj.

Razlomljena racionalna funkcija $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ također je prema teoremu neprekinuta funkcija za sve x osim nultačaka nazivnika $Q_m(x)$ ukoliko nisu istodobno nultačke brojnika $P_n(x)$ barem istoga reda.

3. NEPREKINUTOST GONIOMETRIJSKIH FUNKCIJA

a) $y = \sin x$.

Dokaz, da je $\sin x$ neprekinuta funkcija za kakavgod $x = a$.

Prema (87a):

$$|f(a) - f(x)| = |\sin a - \sin x| = \left|2 \cos \frac{a+x}{2} \cdot \sin \frac{a-x}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\cos \frac{a+x}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{a-x}{2}\right|.$$

Kako je $\left|\cos \frac{a+x}{2}\right| \leq 1$, a $\left|\sin \frac{a-x}{2}\right| < \frac{|a-x|}{2}$ [vidi (84)], slijedi

$$|\sin a - \sin x| < 2 \cdot 1 \cdot \frac{|a-x|}{2},$$

ili

$$|\sin a - \sin x| < |a - x|.$$

Budući da $x \to a$, $|a - x| \to 0$, pa je

$$|\sin a - \sin x| < \varepsilon, \text{ čim je } |a - x| < \delta(\varepsilon),$$

a to je definicija neprekinutosti funkcije $\sin x$ za $x = a$.

Kako je a bila kakvagod vrijednost apscise x, zaključujemo, da je $\sin x$ neprekinuta funkcija za sve x.

b) $y = \cos x$.

Dokaz neprekinutosti za sve x:

Prema (87a): $|f(a) - f(x)| = |\cos a - \cos x| =$

$$= \left|-2\sin\frac{a+x}{2}\cdot\sin\frac{a-x}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{a+x}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{a-x}{2}\right| < 2\cdot 1\cdot\frac{|a-x|}{2}.$$

Dakle $$|\cos a - \cos x| < |a - x|$$

ili $$|\cos a - \cos x| < \varepsilon, \quad \text{jer } x \to a, \text{ pa } |a - x| \to 0.$$

c) $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ je kvocijent neprekinutih funkcija, pa je neprekinuta funkcija prema gornjem teoremu i to za sve x, osim za

$$x = \frac{\pi}{2}(2k+1) \quad \text{(nultačke } \cos x).$$

d) $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ je neprekinuta funkcija s istog razloga i to za sve x, osim za $x = k\pi$ (nultačke $\sin x$).

4. NEPREKINUTOST EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE I HIPERBOLNIH FUNKCIJA

Dokaz neprekinutosti funkcije $y = a^x$ u nekoj tački apscise x po volji.

Dodamo li apscisi x funkcije a^x neki prirast po volji h, dobit će funkcija u toj novoj tački apscise $x + h$ vrijednost a^{x+h} ili

$$a^{x+h} = a^x \cdot a^h.$$

Pređimo sada na limes, pustivši da prirast h teži nuli, dakle $x + h \to x$:

$$\lim_{h\to 0} a^{x+h} = \lim_{h\to 0}(a^x \cdot a^h) = a^x \cdot \lim_{h\to 0} a^h = a^x \cdot 1 = a^x.$$

Time je dokazano, da je funkcija a^x neprekinuta za sve x, jer teži svojoj vrijednosti a^x, kad argument $x + h$ teži x.

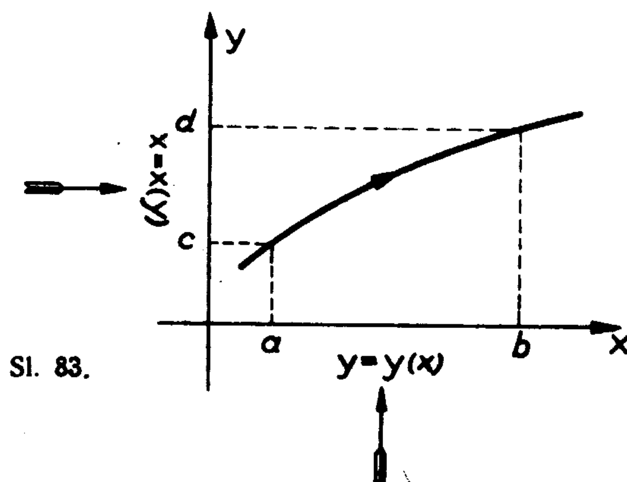
Iz navedenog slijedi, da su prirodne eksponencijalne funkcije e^x i e^{-x} također neprekinute funkcije pa obzirom na teorem o neprekinutosti funkcija zaključujemo, da su hiperbolne funkcije [vidi (58) i (59)] neprekinute za sve x, samo $\operatorname{cth} x$ je prekinut za $x = 0$.

5. NEPREKINUTOST INVERZNIH FUNKCIJA

Ako je funkcija $y = y(x)$ jednoznačna, neprekinuta i monotona (tj. uvijek raste ili uvijek pada) u intervalu od $x = a$ do $x = b$, tada je njena inverzna funkcija $x = x(y)$ također jednoznačna, neprekinuta i monotona u intervalu od $y = c = y(a)$ do $y = d = y(b)$ (vidi sl. 83).

Posljedica.

Arkus-funkcije, logaritamska funkcija i area-funkcije su neprekinute za sve x, za koje su definirane samo je funkcija $\operatorname{Arcth} x$ prekinuta za $x = -1$ i $x = +1$.



Sl. 83.

6. SVOJSTVA NEPREKINUTE FUNKCIJE

1) Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta za $x = c$ i ima u toj tački vrijednost različitu od nule, tada postoji okoliš oko tačke $x = c$, u kojem funkcija ima uvijek isti predznak.

2) Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$, i ima na krajevima toga intervala vrijednosti protivnog predznaka, tada se funkcija poništava bar jedanput u intervalu $[a, b]$, tj. ima u tom intervalu bar jednu nultačku.

3) Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$ i ima na krajevima intervala različite vrijednosti, tj. $f(a) \neq f(b)$, tada funkcija prima bar jednom unutar tog intervala svaku vrijednost sadržanu između te dvije krajnje vrijednosti $f(a)$ i $f(b)$.

4) Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$, ona je u tom zatvorenom intervalu i omeđena gore i dolje, tj. sve njene vrijednosti leže ispod jednog čvrstog broja (gornje međe) i iznad drugog čvrstog broja (donje međe), jer pošto je funkcija neprekinuta ona je i konačna.

5) Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$, ona p r i m a svoju gornju i donju među, tj. ima za izvjesne vrijednosti argumenta x maksimum i minimum.

7. JEDNOLIKA NEPREKINUTOST FUNKCIJA

Funkcija $f(x)$ definirana u nekom intervalu zove se jednoliko neprekinuta ili uniformno kontinuirana u tom intervalu, ako se za po volji odabrani realan broj $\varepsilon > 0$ može naći $\eta > 0$ takav, da za svake dvije vrijednosti x_1, x_2 iz tog intervala vrijedi

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \text{ ako je } |x_2 - x_1| < \eta.$$

Napomena. Ako je funkcija $f(x)$ jednoliko neprekinuta u nekom intervalu onda je očito ona u tom intervalu i neprekinuta. No obrat ne vrijedi; neprekinutost u nekom otvorenom ili poluotvorenom intervalu ne povlači i jednoliku neprekinutost u tom intervalu. Primjer takve funkycije je $y = \frac{1}{x}$ u $(0, 1)$ koja je u tom intervalu neprekinuta ali nije jednoliko neprekinuta. Primjetimo još na kraju da neprekinutost u zatvorenom intervalu povlači i jednoliku neprekinutost u tom intervalu, dakle u zatvorenom intervalu ta su dva pojma ekvivalentna.

§ 9.

ASIMPTOTE KRIVULJA

1. POJAM

Neka je zadana krivulja s jednom ili više beskonačnih grana

$$F(x,y) = 0, \text{ odnosno } y = f(x)$$

i pravac

$$y = kx + l.$$

Ako udaljenost od pravca do tačke, koja se kreće po beskonačnoj grani krivulje, teži nuli, tada se pravac zove **asimptota krivulje**.

Asimptote mogu biti usporedne s koordinatnim osima, a mogu biti i kose prema tim osima.

Npr. tangentoida ima za $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ asimptote, koje su usporedne s osi Y (vidi sl. 49), dok grafovi funkcija $y = \text{th}\, x$ i $y = \text{cth}\, x$ imaju asimptote $y = \pm 1$ usporedne s osi X (vidi sl. 59).

2. ASIMPTOTE USPOREDNE S KOORDINATNIM OSIMA

Promotrimo najprije slučajeve, kad su asimptote usporedne s koordinatnim osima.

Ako krivulja ima asimptotu usporednu s osi x, tada jednadžba te asimptote prema sl. 84 glasi

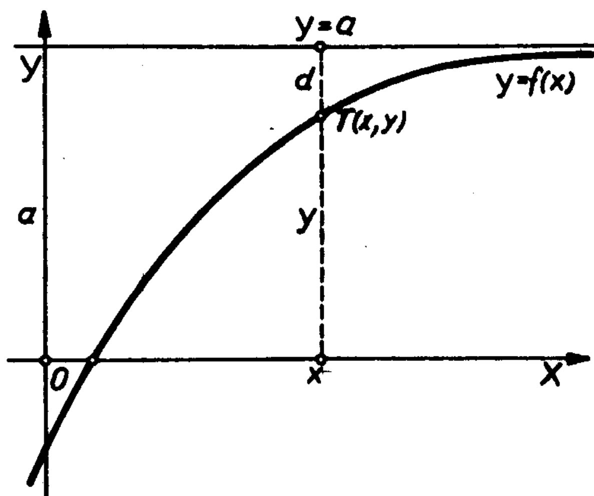
$$y = a.$$

Odredimo a.

Kad se tačka $T(x,y)$ idući po beskonačnoj grani krivulje sve više približava asimptoti $y = a$, tada, kako se vidi iz sl. 84, razmak d između asimptote i ordinate y tačke T, tj.

$$d = a - y$$

teži nuli, pa je



Sl. 84.

$$\lim_{x \to \infty} d = \lim_{x \to \infty} (a - y) = a - \lim_{x \to \infty} y = 0$$

a odatle je

$$a = \lim_{x \to \infty} y.$$

Prema tome **jednadžba asimptote usporedne s osi X** na krivulju $y = f(x)$ glasi

$$y = a, \tag{88}$$

gdje je $a = \lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Ako y nema konačnog limesa kad $x \to \infty$, krivulja nema asimptote usporedne s osi X.

Na primjer krivulja

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

ima asimptotu $y = 0$, tj. os X, jer je prema (88)

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = 0$$

dok krivulja

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

takve asimptote nema, jer je

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = \infty$$

Na isti način dobijemo jednadžbu asimptote usporedne s osi Y. Prema slici 85 jednadžba asimptote glasi

$$x = b.$$

Prema slici

$$d = b - x$$

pa je

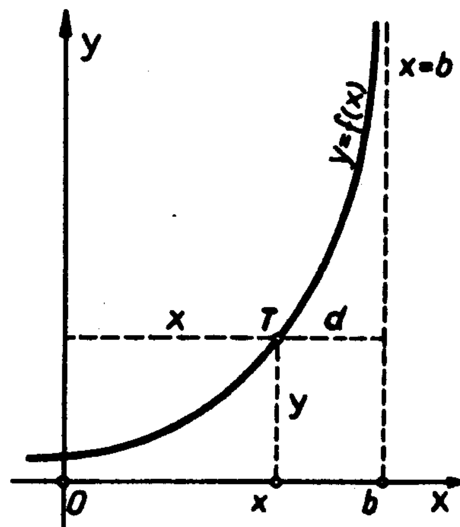
$$\lim_{y \to \infty} d = \lim_{y \to \infty} (b - x) = b - \lim_{y \to \infty} x = 0$$

a odatle je

$$b = \lim_{y \to \infty} x$$

Jednadžba asimptote usporedne s osi Y na krivulju $y = f(x)$, odnosno za funkciju $x = \varphi(y)$ u inverznom obliku:

$$x = b \tag{88a}$$



Sl 85.

gdje je

$$b = \lim_{y \to \infty} x = \lim_{y \to \infty} \varphi(y)$$

Npr. za tangentoidu $y = \mathrm{tg}\, x$ jednadžbe asimptota usporednih s osi Y dobijemo tako, da napišemo funkciju u inverznom obliku

$$x = \mathrm{arc\,tg}\, y$$

pa prema (88a) imamo:

$$b = \lim_{y \to \infty} \mathrm{arc\,tg}\, y = \pm \frac{\pi}{2} \qquad \text{(vidi sl. 68)}$$

pa su

$$x = \pm \frac{\pi}{2}$$

jednadžbe traženih asimptota tangentoide u toku jednog perioda (vidi sl. 49).

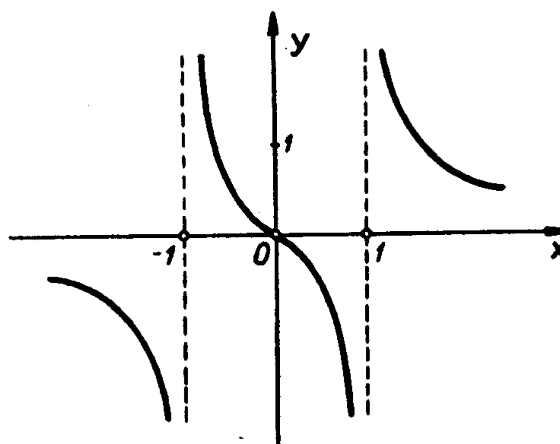
Iz navedenog vidimo, da gore izvedene formule za određivanje asimptota usporednih s koordinatnim osima možemo primijeniti samo u tom slučaju, kad se jednadžbe krivulja dadu napisati u eksplicitnom obliku $y = f(x)$, odnosno $x = \varphi(y)$. Ne možemo li zadanu implicitnu jednadžbu krivulje prikazati u eksplicitnom obliku, njene asimptote usporedne s koordinatnim osima možemo odrediti samo po pravilima za određivanje kosih asimptota, o čemu će biti govora kasnije.

Ima li jednadžba zadane krivulje oblik razlomka, tada se određivanje asimptota usporednih s osi Y svodi na određivanje polova funkcije [vidi § 4, 2, c]. Kao primjer nacrtamo približnu sliku razlomljene racionalne funkcije

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

koja, kako smo malo prije pokazali, ima asimptotu

$$y = 0.$$



Sl. 86.

Znamo da su nultačke razlomljene funkcije nultačke brojnika pa je $x = 0$ jednostruka nultačka zadane funkcije.

Znamo također da su polovi funkcije nultačke nazivnika pa iz

$$x^2 - 1 = 0$$

slijedi da su

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}\right\} \text{ polovi I reda,}$$

tj. $x = \pm 1$ su asimptote usporedne s osi Y.

Iz jednadžbe $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ slijedi dalje, da je npr. $y < 0$ za $x = \frac{1}{2}$, dok je $y > 0$ za $x = -\frac{1}{2}$.

Crtamo približni graf funkcije pri čemu uzmimo u obzir, da je graf simetričan na ishodište O, jer je funkcija liha (vidi sl. 86).

3. ASIMPTOTE KOSE OBZIROM NA KOORDINATNE OSI

Pretpostavimo da krivulja $F(x,y) = 0$ ima kosu asimptotu, pa njenu asimptotu napišemo u obliku

$$y = kx + l.$$

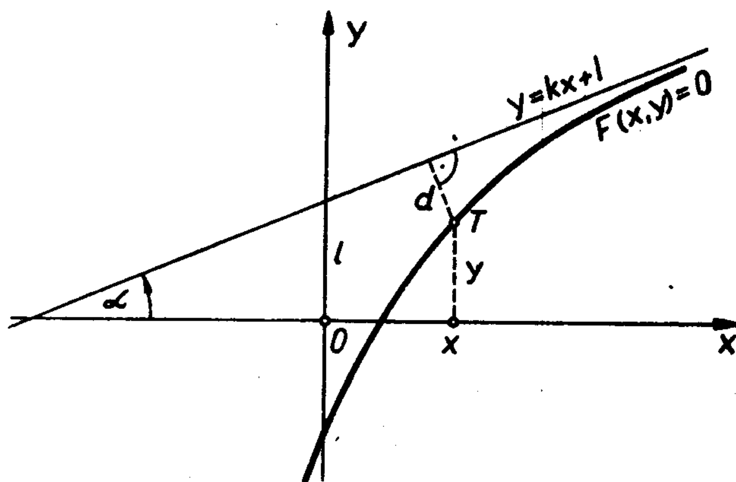
Zadatak se svodi na određivanje koeficijenta smjera $k = \operatorname{tg}\alpha$ i odsječka l na osi Y tražene asimptote.

U tu svrhu odredimo najprije udaljenost d bilo koje tačke $T(x,y)$ beskonačne grane krivulje od asimptote $y = kx + l$.

Postupajući prema poznatoj formuli za određivanje udaljenosti tačke od pravca (vidi Repet. element. matematike IV, § 7, 6) dobijemo

$$y - kx - l = 0 / : \sqrt{1+k^2}$$

$$d = \frac{y - kx - l}{\sqrt{1 + k^2}}$$



Sl. 87.

Kad se tačka $T(x,y)$ idući po beskonačnoj grani krivulje sve više udaljuje od ishodišta O koordinatnog sustava, apsolutna vrijednost apscise x tačke T beskonačno raste, dok udaljenost d tačke T krivulje od asimptote teži nuli, kako se to vidi iz slike 87, tj.

$$\lim_{x\to\infty} d = \lim_{x\to\infty} \frac{y - kx - l}{\sqrt{1+k^2}}$$

ili napisavši $y - kx$ u obliku

$$y - kx = x\left(\frac{y}{x} - k\right)$$

dobijemo

$$\lim_{x\to\infty} d = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\frac{y}{x} - k\right) - l}{\sqrt{1+k^2}} = 0$$

ili

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \lim_{x\to\infty} \left[x\left(\frac{y}{x} - k\right) - l\right] = 0$$

a odatle je

$$\lim_{x\to\infty} \left[x\left(\frac{y}{x} - k\right) - l\right] = 0$$

ili

$$l = \lim_{x\to\infty} \left[x\left(\frac{y}{x} - k\right)\right] \qquad \text{(a)}$$

Budući da prvi faktor x toga izraza teži u beskonačnost, mora drugi faktor $\left(\frac{y}{x} - k\right)$ težiti nuli, jer samo u tom slučaju može čitav izraz imati konačni limes l (opširno o tome bit će govora kasnije u poglavlju o neodređenim oblicima, vidi § 15, 2), pa je

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{y}{x} - k\right) = 0$$

ili

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} - k = 0$$

a odatle je

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} \qquad \text{(b)}$$

Time je određen koeficijent smjera k tražene asimptote $y = kx + l$. Izraz za odsječak l, što ga reže asimptota na osi Y, dobijemo iz (a):

$$l = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{y}{x} - k\right) = \lim_{x\to\infty} (y - kx)$$

u koji uvrstimo vrijednost k dobivenu iz (b) i $y = f(x)$, tj. eksplicitnu jednadžbu zadane krivulje, ukoliko možemo tu jednadžbu napisati u eksplicitnom obliku.

Prema tome jednadžba asimptote na krivulju $y = f(x)$, odnosno $F(x,y) = 0$, koja je kosa obzirom na koordinatne osi, glasi:

$$y = kx + l \qquad (88b)$$

gdje je $k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}$ i $l = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right]$

Postoji i drugi jednostavniji način za određivanje vrijednosti k i l u jednadžbi tražene asimptote $y = kx + l$. Navedimo ga.

U zadanu jednadžbu krivulje $F(x,y) = 0$ uvrsti se $y = kx + l$, pa se članovi dobivenog polinoma poredaju po padajućim potencijama x:

$$F(x, kx + l) = f_1(k,l)\, x^n + f_2(k,l)\, x^{n-1} + \ldots .$$

izjednačimo li s nulom koeficijente prvih dvaju najviših članova

$$\begin{aligned} f_1(k,l) &= 0 \\ f_2(k,l) &= 0 \end{aligned} \qquad (88c)$$

i riješimo li tako dobiveni sustav jednadžbi, dobit ćemo vrijednosti za k i l tražene asimptote $y = kx + l$.

Pokažimo na primjerima, kako se primjenjuju gorè izvedene formule za određivanje asimptota zadanih krivulja. Iz tih primjera vidjet ćemo da kadšto do jednadžbi asimptota dolazimo drugim jednostavnijim putem.

Primjeri.

Odredi asimptote krivulja:

1) $2x^2 + 3x + 2xy - 2 = 0$

Odredimo najprije kosu asimptotu, kojoj jednadžba prema (88b) glasi $y = kx + l$, gdje je $k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}$.

Jednadžbu zadane krivulje podijelimo s x^2:

$$2 + \frac{3}{x} + 2\frac{y}{x} - \frac{2}{x^2} = 0.$$

Odatle:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{x} - 1$$

pa je

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{x} - 1 \right) = -1$$

jer $\frac{1}{x^2}$ i $\frac{1}{x}$ daju na granici nulu, kad $x \to \infty$.

$$k = -1$$

Jednadžba krivulje u eksplicitnom obliku glasi:

$$y = -x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}$$

Uvrštenje tog izraza za y i $k = -1$ u $l = \lim_{x \to \infty} (y - kx)$ daje:

$$l = \lim_{x \to \infty} \left(-x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x} + x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Uvrstimo li $k = -1$ i $l = -\frac{3}{2}$ u $y = kx + l$, dobijemo traženu jednadžbu kose asimptote:

$$\underline{y = -x - \frac{3}{2}}.$$

Odredimo sada na drugi način k i l tražene asimptote. U tu svrhu uvrstimo $y = kx + l$ u jednadžbu zadane krivulje i uredimo dobiveni rezultat:

$$2x^2 + 3x + 2x(kx + l) - 2 = 0$$

ili

$$(2 + 2k)x^2 + (3 + 2l)x - 2 = 0.$$

Prema (88c) izjednačimo s nulom koeficijente prvih dvaju najviših članova dobivene jednadžbe:

$$2 + 2k = 0$$
$$3 + 2l = 0.$$

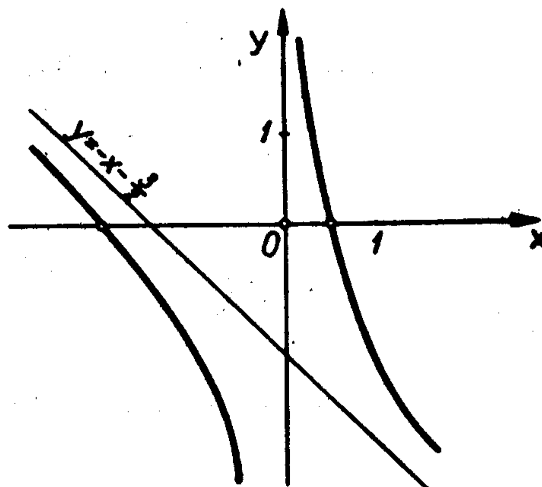
Odatle

$$k = -1$$
$$l = -\frac{3}{2}$$

pa je

$$\underline{y = -x - \frac{3}{2}}$$

jednadžba tražene asimptote.



Sl. 88.

Da odredimo jednadžbu asimptote $x = b$, koja je usporedna s osi Y, mogli bismo izračunati b prema (88a) $b = \lim_{y \to \infty} \varphi(y)$ prikazavši x kao funkciju od y. U našem slučaju mnogo jednostavnije dolazimo do tražene jednadžbe asimptote drugim putem. Iz eksplicitnog oblika jednadžbe

$$y = -x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}$$

vidimo, da kad $x \to 0$, $y \to \infty$, pa je $b = 0$, odnosno

$$\underline{x = 0}$$

tražena asimptota, jer uz asimptotu usporednu s osi Y $y \to \infty$. Os Y je dakle druga asimptota zadane krivulje. Konačno odredimo, ima li zadana krivulja i asimptotu $y = a$ usporednu s osi X.

Računajući prema (88) dobijemo:

$$a = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(-x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Asimptote usporedne s osi X krivulja nema!

Odredivši nultačke funkcije y

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad x_2 = -2$$

možemo približno grafički prikazati zadanu krivulju i njene asimptote (vidi sl. 88).

2. $4x^2 - 9y^2 - 40x + 64 = 0 \; / : x^2$

$$4 - 9\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{40}{x} + \frac{64}{x^2} = 0. \qquad \text{(a}$$

Odatle

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{4}{9} - \frac{40}{9x} + \frac{64}{9x^2}}$$

Prema (88b):

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \pm\frac{2}{3}$$

pa je

$$y = \pm\frac{2}{3}x + l. \qquad \text{(b)}$$

l odredimo najjednostavnije tako, da (b) podijelimo s x:

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{2}{3} + \frac{l}{x}$$

pa $\frac{y}{x}$ uvrstimo u (a):

$$4 - 9\left(\pm\frac{2}{3} + \frac{l}{x}\right)^2 - \frac{40}{x} + \frac{64}{x^2} = 0$$

ili

$$4 - 4 \mp 12\frac{l}{x} - 9\frac{l^2}{x^2} - \frac{40}{x} + \frac{64}{x^2} = 0 / \cdot x$$

$$\mp 12l - 9\frac{l^2}{x} - 40 + \frac{64}{x} = 0.$$

Neka $x \to \infty$, tada na granici ostaje

$$\mp 12l - 40 = 0,$$

a odatle je

$$l = \mp\frac{10}{3}.$$

Uvrštenje u (b) daje jednadžbu dviju asimptota:

$$\underline{y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}} \quad \text{i} \quad \underline{y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}}.$$

Odredi jednadžbe tih asimptota i na drugi način, tj. prema (88c).

Zadana krivulja drugih asimptota nema, jer je hiperbola. Da se u to uvjerimo i da istodobno prokontroliramo dobiveni rezultat, transformirajmo jednadžbu zadane krivulje na način koji slijedi:

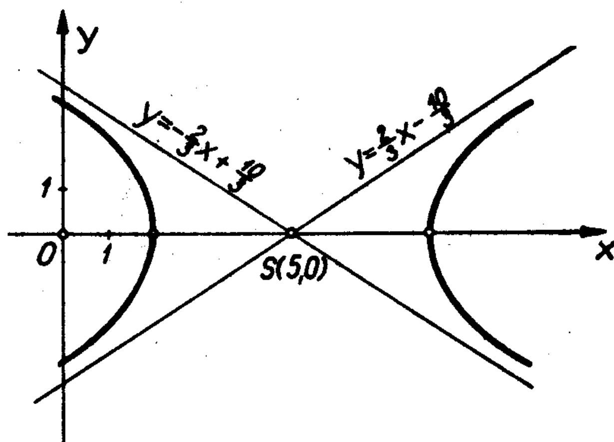
$$4x^2 - 9y^2 - 40x + 64 = 0$$
$$4(x^2 - 10x) - 9y^2 = -64$$
$$4(x-5)^2 - 9y^2 = -64 + 100$$
$$4(x-5)^2 - 9y^2 = 36 \; / : 36$$
$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

a to je hiperbola sa središtem u $S\,(5,0)$ i poluosima $a = 3$ i $b = 2$, kojoj su asimptote

$$y = \pm \frac{2}{3}(x - 5)$$

$$y = \pm \frac{2}{3}x \mp \frac{10}{3}$$

(vidi Repet. element. matematike III, § 10, 4.) Vidi sl. 89.



Sl. 89.

3. $x^3 + xy^2 - ay^2 = 0 \,/ : x^3$ (a)

gdje je $a > 0$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - a\frac{y^2}{x^3} = 0$$

Odatle je

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{a\frac{y^2}{x^3} - 1}.$$

Prema (88b):

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \pm \sqrt{-1} = \pm i\,.$$

k nema realnog značenja, dakle krivulja nema kose asimptote!

Odredi k i l također prema (88c).

Da odredimo asimptotu krivulje usporednu s osi Y: $x = b$, podijelimo (a) s y^2:

$$\frac{x^3}{y^2} + x - a = 0.$$

Kad $x \to a$, $(x - a) \to 0$, pa i $\frac{x^3}{y^2} \to 0$, a to je samo tako moguće da $y \to \infty$.
Dakle prema (88a)

$$x = a$$

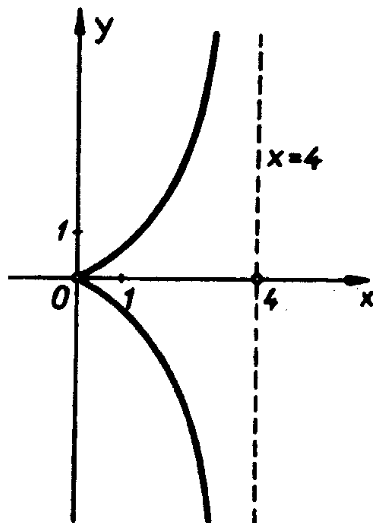
jednadžba asimptote usporedne s osi Y.

Asimptote $y = a$ usporedne s osi X krivulja nema, jer izračunavši y iz (a) dobijemo prema (88)

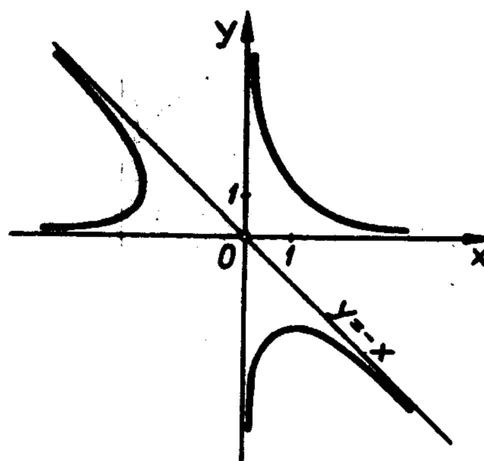
$$a = \pm \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^3}{a - x}} = \pm \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{a}{x^3} - \frac{1}{x^2}}} = \pm \infty.$$

Do istog rezultata mogli bismo doći bez računa samo uočivši da jednadžba (a) krivulje sadrži x^3 pa y mora težiti u beskonačnost, kad $x \to \infty$.

Slika 90 predočuje za $a = 4$ zadanu krivulju koja se zove c i s o i d a, i njenu asimptotu.



Sl. 90.



Sl. 91.

4. $$x^2y + xy^2 - 2 = 0 \qquad \text{(a)}$$

k i l tražene asimptote $y = kx + l$ odredimo prema (88c).

Uvrštenje u (a) $y = kx + l$ daje

$$x^2(kx + l) + x(kx + l)^2 - 2 = 0$$

ili

$$kx^3 + lx^2 + k^2x^3 + 2klx^2 + l^2x - 2 = 0$$

ili

$$(k^2 + k)x^3 + (l + 2kl)x^2 + l^2x - 2 = 0.$$

Stavimo

$$k^2 + k = 0$$

$$l + 2kl = 0.$$

Odatle

$$k_1 = 0 \qquad k_2 = -1$$

$$l_1 = 0. \qquad l_2 = 0$$

pa su

$$\underline{y = 0} \qquad \underline{y = -x}$$

tj. raspolovnica II i IV kvadranta i os X su tražene asimptote.

Jednadžbu asimptote $x = b$ usporedne s osi Y odredimo prema (88a). U tu svrhu izračunajmo x iz (a):

$$x^2 + xy - \frac{2}{y} = 0.$$

Odatle

$$x = -\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{2}{y}}$$

pa je

$$b = \lim_{y \to \infty} x = \lim_{y \to \infty} \left(-\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{2}{y}} \right) = 0$$

jer drugi član diskriminante daje na granici nulu, dok je za negativni predznak drugog korijena $b = -\infty$. Dakle

$$\underline{x = 0}$$

tj. os Y je treća tražena asimptota.

Slika 91 predočuje krivulju i njene asimptote.

5. $x^4 - x^3y + y = 0 / : x^4$

$$1 - \frac{y}{x} + \frac{y}{x^4} = 0.$$

Odatle

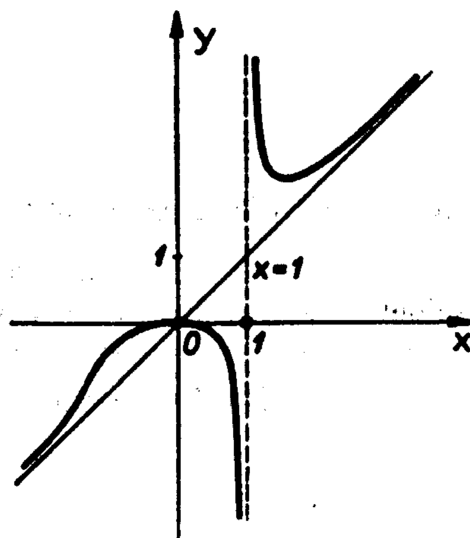
$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{y}{x^4}$$

pa je prema (88b):

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 1.$$

Iz jednadžbe krivulje imamo

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1} \qquad \text{(a)}$$



Sl. 92.

pa je

$$l = \lim_{x \to \infty} (y - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - x^4 + x}{x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - \frac{1}{x}} = 0 .$$

Prema tome je tražena asimptota

$$\underline{y = x.}$$

Iz (a) slijedi da $y \to \infty$ kad je nazivnik $x^3 - 1 = 0$ pa je jednadžba asimptote usporedne s osi Y:

$$\underline{x = 1.}$$

Asimptote usporedne s osi X krivulja nema, jer u njenu jednadžbu ulazi x^4.

Iz (a) slijedi dalje, da je $y = 0$ kad je brojnik $x = 0$, tj. $x = 0$ je četverostruka nul-tačka funkcije. Vidi sl. 92.

Odredi asimptote krivulja i prikaži grafički krivulje i asimptote.

1. $x^3 + x^2y - 3y = 0$

$[x = \pm\sqrt{3}; \quad y = -x]$

2. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

$[y = -x - 1]$

3. $9x^2 + 54x - y^2 + 72 = 0.$

$[y = \pm 3(x + 1)]$

4. $x^4 - x^3y + x^3 + 1 = 0$

$[y = x + 1; \quad x = 0]$

5. $x^5 - x^4y - 8 = 0$

$[y = x; \quad x = 0]$

6. $x^3 - 3xy^2 - 2 = 0$

$\left[y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x; \quad x = 0\right]$

7. $(y + x + 1)^2 = x^2 + 1$

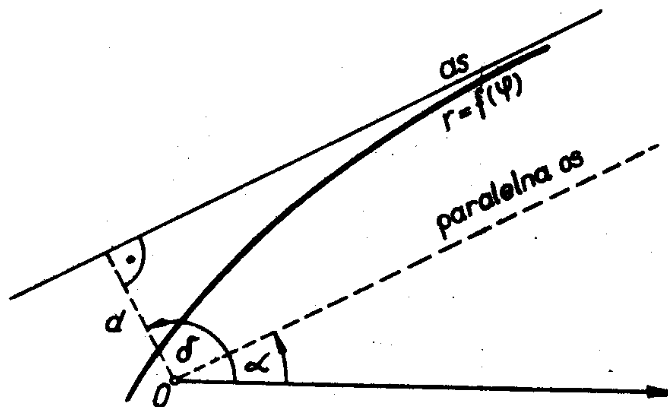
[primijeni drugi način; $y = -1$; $y = -2x - 1$]

4. KRIVULJA JE ZADANA U POLARNIM KOORDINATAMA $r = r(\varphi)$

U tom je slučaju asimptota određena udaljenošću d od pola O i kutom δ, što ga d zatvara s polarnom osi (vidi sl. 93).

Da odredimo te elemente asimptote, napišemo jednadžbu krivulje $r = r(\varphi)$ u inverznom obliku $\varphi = \varphi(r)$ i odredimo

$$\lim_{r \to \infty} \varphi(r) = \alpha \qquad \text{(88d)}$$



Sl. 93.

Ako taj limes postoji i ima konačnu vrijednost α, računamo udaljenost d:

$$d = \lim_{\varphi \to \alpha} [r \cdot \sin(\varphi - \alpha)] \qquad \text{(88e)}$$

odnosno

$$d = \lim_{\varphi \to \alpha} [r \cdot \sin(\alpha - \varphi)]$$

Postoji li taj pozitivni limes, tada krivulja ima asimptotu, koja je određena s d i $\delta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, odnosno $\delta = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

Primjer:

Hiperbolna spirala $r = \frac{a}{\varphi}$ (vidi Dio II, sl. 20).

Prema (88d)

$$\alpha = \lim_{r \to \infty} \frac{a}{r} = 0$$

Prema (88e)

$$d = \lim_{\varphi \to 0} \left[\frac{a}{\varphi} \sin(\varphi - 0) \right] = a \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} =$$

$= \text{prema (86)} = a \cdot 1 = a$

$$d = a.$$

Asimptota je paralelna s polarnom osi i udaljena od nje za a. Da napišemo njenu jednadžbu, izvedimo općenito jednadžbu pravca u polarnim koordinatama.

Pravac p određen je obzirom na polarni koordinatni sustav kutom α i udaljenošću d od pola O (vidi sl. 94).
Neka je $T(\varphi, r)$ bilo koja tačka pravca p.
Iz prav. $\triangle$ OAT slijedi:

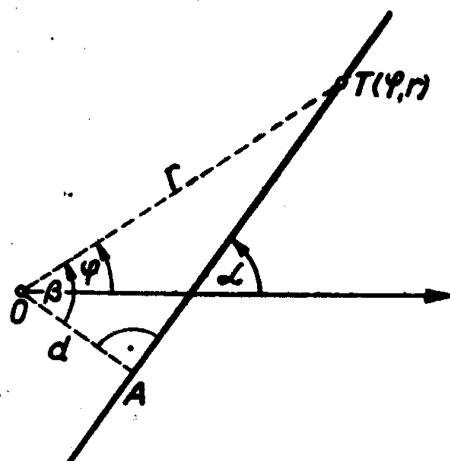
$$r = \frac{d}{\cos \beta} \qquad \text{(a)}$$

Prema slici imamo dalje

$$\beta = \varphi + (90^0 - \alpha)$$

pa je

$\cos \beta = \cos [90^0 - (\alpha - \varphi)] = \sin(\alpha - \varphi).$



Sl. 94.

Uvrštenje u (a) daje

$$r = \frac{d}{\sin(\alpha - \varphi)}$$

odnosno (88f)

$$r = \frac{d}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

To je jednadžba pravca u polarnim koordinatama.

Prema tome jednadžba asimptote na hiperbolnu spiralu $r = \frac{a}{\varphi}$ glasi:

$$\underline{r = \frac{a}{\sin \varphi}}$$

jer je $\alpha = 0$.

Odredi jednadžbu asimptote krivulje $r = \frac{a\varphi}{\varphi - 1}$

$$\left[r = \frac{a}{\sin(\varphi - 1)}\right]$$

§ 10.

DERIVACIJA FUNKCIJE

1. POJAM DERIVACIJE

Traži se smjer krivulje $y = f(x)$ u tački M apscise x.

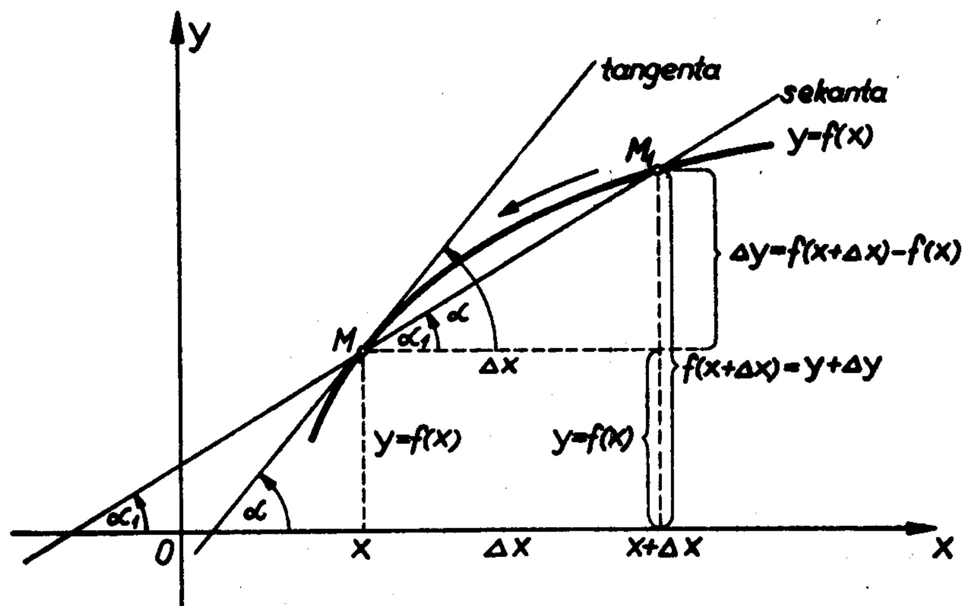
Dademo li toj apscisi x neki prirast po volji Δx, tj. pređemo li od zadane tačke M na tačku po volji M_1, dobit će funkcija y prirast

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \text{(vidi sl. 95.)}$$

Kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ zove se kvocijent diferencija, jer je u brojniku razlika (diferencija) ordinata, a u nazivniku razlika apscisa tačaka M_1 i M.

Iz slike 95 vidimo, da je

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha_1 =$ gradijent sekante MM_1 = srednji tangens smjera luka MM_1 krivulje, jer vrijednost toga kvocijenta ovisi ne samo o zadanoj tački M, već i po volji uzetoj tački M_1, tj. o Δx.



Sl. 95.

Da dobijemo pravi smjer krivulje u tački M, pustimo da Δx teži nuli i pređimo na limes. U tom će se slučaju sekanta MM_1 okretati oko tačke M pa se može dogoditi, da će težiti nekom graničnom položaju. Taj granični položaj sekante zove se tangenta na krivulju $y = f(x)$ u tački M apscise x i za smjer krivulje u tački M uzima se smjer te tangente.

Prema tome

tangens smjera krivulje $y = f(x)$ u tački M apscise $x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ = limes gradijenta sekante $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha$ = gradijent tangente povučene na krivulju u tački M apscise x.

Izraz:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ zove se d e r i v a c i j a funkcije $y = f(x)$ u tački apscise x i bilježi se simbolički sa $y'(x)$ ili y' ili $D_x y(x)$.

[$y'(x)$ čitaj: derivacija y po x ili y crtano od x, a $D_x y(x)$ čitaj: derivacija y od x po x].

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (89)$$

Iz navedenog slijede dvije definicije derivacije:

A n a l i t i č k a d e f i n i c i j a: derivacija funkcije je granična vrijednost (limes) kvocijenta diferencija $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kad Δx teži nuli bilo na koji način, tj. s lijeva i s desna, neprekinuto ili u skokovima:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

G e o m e t r i j s k a d e f i n i c i j a: derivacija je gradijent tangente povučene na krivulju u zadanoj tački:

$$y = \operatorname{tg} \alpha.$$

Primjedbe.

1. Do sada je bilo govora o derivaciji funkcije u j e d n o j t a č k i Ako zadana funkcija ima derivaciju u s v a k o j t a č k i nekog intervala, tada je to nova funkcija, koja se zove derivacija zadane funkcije, npr. $\cos x$ je derivacija od $\sin x$ (vidi dalje), a operacija kojom se određuje derivacija zadane funkcije, zove se deriviranje ili diferenciranje.

2. Derivacija može težiti prema $+\infty$ ili prema $-\infty$, ako se približavamo nekoj tački krivulje. Krivulja tada ima u toj tački tangentu okomitu na os X, jer u tom slučaju $y' = \operatorname{tg} \alpha \to \infty$, dakle $\alpha \to 90^0$. Npr. derivacija funkcije $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, čiji je graf kružnica polumjera r, teži prema $+\infty$, odnosno $-\infty$, kad $x \to +r$, odnosno $x \to -r$. U tim su tačkama kružnice tangente okomite na os X.

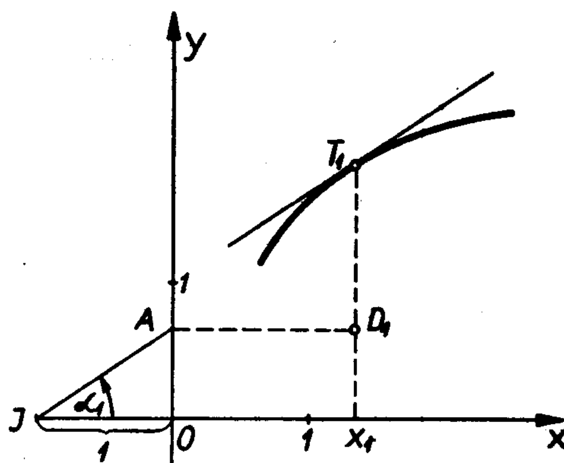
U takvim tačkama kvocijent diferencija nema konačnog limesa, pa stoga u strogom smislu funkcija tamo nema derivacije. Ipak često kažemo, da je u tim tačkama derivacija neizmjerno velika.

2. GRAFIČKO DERIVIRANJE

Sada kada znamo, da je derivacija funkcije gradijent tangente povučene na krivulju u zadanoj tački tj. u tački apscise $x = x_1$:

$$y'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha,$$

možemo lako provesti deriviranje funkcije grafičkim putem, ako nam je samo poznat graf te funkcije.



Sl. 96.

Postupak: U tački T_1 krivulje, u kojoj tražimo vrijednost derivacije, rišemo tangentu na krivulju (vidi sl. 96). Na os X na lijevo od ishodišta nanosimo jedinicu pa iz tako dobivene tačke J vučemo paralelu s konstruiranom tangentom. Odsječak OA, što ga ta paralela JA reže na osi Y, jest tražena vrijednost derivacije, jer je prema slici:

$$OA = OJ \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = y'(x_1),$$

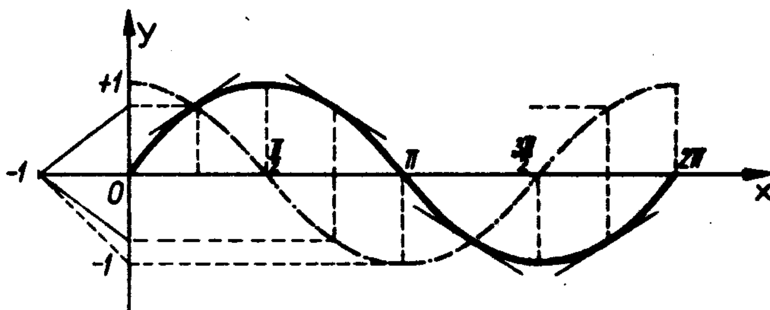
(derivacija je gradijent tangente, a pravac AJ je usporedan s tangentom!).

Taj odsječak OA nanosimo na ordinatu tačke T_1, pa dobijemo prvu tačku D_1 tražene derivacije. Postupak se nastavlja za sve karakteristične tačke krivulje. Spojimo li tako dobivene tačke deviracije u krivulju, dobit ćemo traženi graf derivacije zadane funkcije.

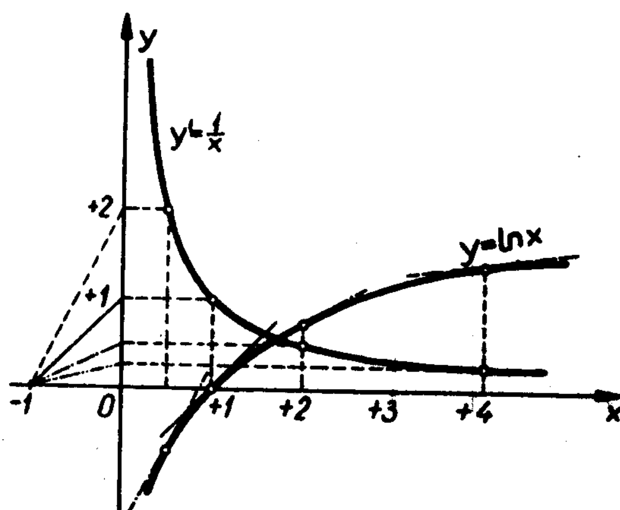
Ako funkcija u nekoj tački pada, odsječak na osi Y leži na negativnom dijelu osi Y, pa derivacija ima negativnu vrijednost.

Slike 97 i 98 prikazuju grafičko deriviranje funkcija $y = \sin x$ i $y = \ln x$.

Iz tih slika vidimo, da je $D_x \sin x = \cos x$ i $D_x \ln x = \frac{1}{x}$.



Sl. 97.



Sl. 98.

3. JEDNADŽBE TANGENTE I NORMALE

Iz geometrijske definicije derivacije neposredno slijedi jednadžba tangente na krivulju $y(x)$ u tački $T_1(x_1, y_1)$, (vidi sl. 99).

Tangenta je pravac, koji prolazi zadanom tačkom $T_1(x_1, y_1)$, dakle jednadžba toga pravca glasi (vidi Repet. element. matematike, IV, § 7, 1, f)

$$y - y_1 = a(x - x_1). \qquad \text{(a)}$$

Za tangentu je gradijent

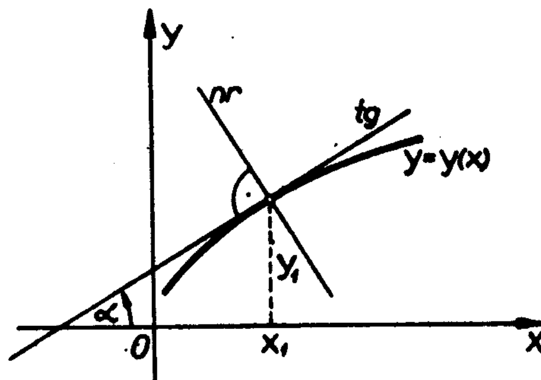
$$a = \operatorname{tg} \alpha_1 = y'(x_1).$$

Uvrštenje u (a) daje

$$y - y_1 = y'(x_1) \cdot (x - x_1). \qquad (90)$$

To je jednadžba tangente na krivulju

$y = y(x)$ u tački $T_1(x_1, y_1)$.



Sl. 99.

Normala prolazi istom tačkom $T_1(x_1, y_1)$ krivulje i stoji okomito na tangenti, dakle njen je gradijent recipročan i protivno označen:

$$a = -\frac{1}{y'(x_1)}.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1). \qquad (91)$$

To je jednadžba normale na krivulju $y = y(x)$ u istoj tački $T_1(x_1, y_1)$.

Primjeri.

1. Napiši jednadžbu tangente i normale na parabolu $y = x^2$ u tački apscise $x = 3$.
Prema (90) računamo:

$$y_1 = y(x_1) = x_1^2 = 3^2 = 9.$$

Derivacija $y' = 2x$ [vidi dalje formulu (92)], a u tački $x = x_1 = 3$:
$y'(x_1) = 2x_1 = 2 \cdot 3 = 6$.

Uvrštenje $y_1 = 9$, $y'(x_1) = 6$ i $x_1 = 3$ u (90) daje:

$$y - 9 = 6(x - 3) \quad . \quad . \quad . \quad \text{jednadžba tangente.}$$

Odatle prema (91)

$$y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3) \quad . \quad . \quad . \quad \text{jednadžba normale.}$$

Ili ako gornje jednadžbe uredimo:

$$y = 6x - 9$$

$$y = -\frac{1}{6}x + 9{,}5.$$

(Prikaži sve grafički !).

2. Isto za $y = \sin x$ u tački apscise $x = \frac{2}{3}\pi$.
Prema (90) računamo:

$$y_1 = y(x_1) = \sin\frac{2}{3}\pi = \sin 120^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y' = \cos x \qquad \text{(vidi dalje formulu (95)).}$$

$$y'(x_1) = \cos x_1 = \cos\frac{2}{3}\pi = \cos 120^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Uvrštenje u (90) daje:

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\pi\right) \quad . \quad . \quad . \quad \text{jednadžba tangente.}$$

Prema (91):

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(x-\frac{2}{3}\pi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{jednadžba normale.}$$

Ili

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y=2x-\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ili uz $\pi = 3{,}14$ i $\sqrt{3}=1{,}73$

$$\underline{y=-0{,}5x+1{,}92}$$

$$\underline{y=2x-3{,}33.}$$

(Prikaži sve grafički!)

3. Isto za $y=3\sin(2x-1)$ u nultačkama.

Odredimo nultačke.

Stavimo $y=0$, odatle

$$3\sin(2x-1)=0$$

ili

$$\sin(2x-1)=0.$$

Sinus je jednak nuli, kad je njegov argument jednak 0 ili π, dakle

$$2x-1=0, \quad \text{odatle} \quad x_1=\frac{1}{2}, \quad y_1=0$$

$$2x-1=\pi, \quad \text{odatle} \quad x_2=\frac{\pi+1}{2}, \quad y_2=0.$$

Kako ćemo kasnije vidjeti (vidi primjer 1. na str. 146) derivacija $y'=3\cos(2x-1)\cdot 2=$ $=6\cos(2x-1)$, a u tački $x=x_1=\frac{1}{2}$: $y'(x_1)=6\cos\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)=6\cos 0=6$, a za $x=x_2=\frac{\pi+1}{2}$: $y'(x_2)=6\cos\left(2\,\frac{\pi+1}{2}-1\right)=6\cdot\cos(\pi)=-6$. Uvrštenje izračunatih vrijednosti u (90) i (91) daje:

Tangenta u tački $\left(\frac{1}{2},\,0\right)$:

$$y-0=6\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Normala u istoj tački:

$$y-0=-\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

ili ako uredimo:

$$\underline{y=6x-3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{tangenta I.}$$

$$\underline{y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{normala I.}$$

Tangenta u tački $\left(\frac{\pi+1}{2},0\right)$:

$$y-0=-6\left(x-\frac{\pi+1}{2}\right)$$

Normala u istoj tački:

$$y - 0 = \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi + 1}{2}\right)$$

ili ako uredimo:

$$y = -6x + 12{,}42 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{tangenta II.}$$

$$y = \frac{1}{6}x - 0{,}35 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{normala II.}$$

(Prikaži sve grafički!

4. DERIVACIJE POJEDINIH FUNKCIJA. PRAVILA ZA DERIVIRANJE

a) $y = x^n$, **gdje je** n **prirodan broj:** $y' = ?$

Prema (89) računamo:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n.$$

Razvijanje po binomnom poučku (vidi Repet. element. matematike) daje:

$$\Delta y = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} \cdot \Delta x^3 + \ldots +$$
$$+ \binom{n}{1} x \cdot \Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x^n.$$

Odatle, ako gornju jednakost podijelimo s Δx, prethodno ukinuvši x^n i $-x^n$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \binom{n}{3} x^{n-3} \cdot \Delta x^2 + \ldots + \binom{n}{1} x \cdot \Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}.$$

Prijelaz na limes daje:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1},$$

jer svi ostali članovi razvoja sadržavaju Δx, pa teže nuli, kad $\Delta x \to 0$.

Dakle:

$$D_x x^n = nx^{n-1}. \qquad (92)$$

Npr.

$$y = x^6 \qquad y' = 6x^5$$
$$y = x^3 \qquad y' = 3x^2$$
$$y = x^2 \qquad y' = 2x.$$

Obratimo osobitu pažnju na:

$$y = x, \qquad y' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

ili

$$D_x x = 1. \qquad (92a)$$

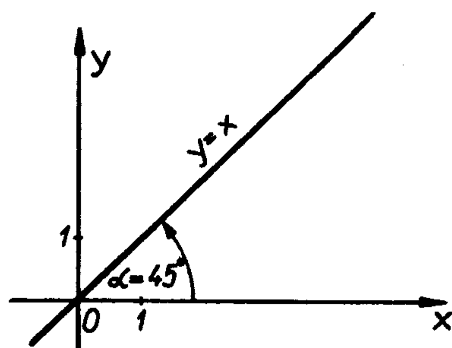
Derivacija promjenljive po toj promjenljivoj jednaka je 1.

Prema tome je npr. $D_y y = 1$, $D_z z = 1$ itd.

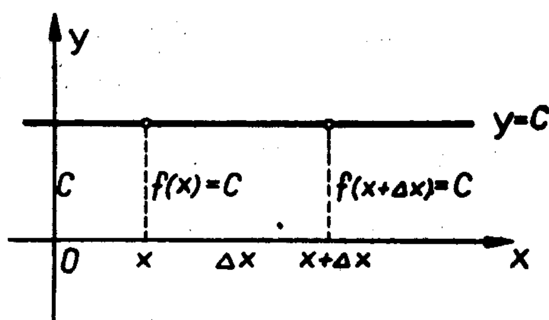
Do istog rezultata dolazimo geometrijski:

Kako se tangenta na pravac podudara sa samim pravcem, bit će prema slici 100 i obzirom na geometrijsko značenje derivacije $y' = \operatorname{tg} \alpha$:

$$D_x x = \operatorname{tg} 45^0 = 1.$$



Sl. 100.



Sl. 101.

b) $y = C$ **(konstanta):** $y' = ?$

Prema (89): $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$ (vidi sl. 101)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$D_x C = 0. \qquad (93)$$

Isto geometrijski: $y' = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Derivacija konstante jednaka je nuli.

c) Derivacija zbroja (razlike) funkcija

Prema (89) i (23) dobijemo:

$$D_x [u(x) \pm v(x)] = D_x u(x) \pm D_x v(x) = u'(x) \pm v'(x). \qquad (94)$$

Derivacija zbroja (razlike) funkcija jednaka je zbroju (razlici) derivacija tih funkcija.

Primjer:

$$y = x^5 - x^2 + x - 7$$
$$y' = 5x^4 - 2x + 1.$$

Konstanta -7 otpada, jer je derivacija konstante jednaka nuli.

d) $y = \sin x$; $y' = ?$

Prema (89) računamo:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$
$$= 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

prema poznatoj trigonometrijskoj formuli [Repet. element. matematike formula (31)] ili ako uredimo:

$$\Delta y = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\ \Big|\ :\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},$$

ili ako brojnik i nazivnik desne strane podijelimo s 2:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Prelazimo na limes pustivši da $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \text{prema (24)} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

$\lim \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$, jer je kosinus neprekinuta funkcija pa $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ teži $\cos x$, pošto argument $\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ teži x kad $x\to 0$ (vidi § 8).

Drugi limes je 1 prema (86).

Dobijemo dakle:

$$y' = \cos x \quad \text{ili}$$

$$D_x \sin x = \cos x. \tag{95}$$

e) $y = \cos x;\ \ y' = ?$

Postupajući na isti način uz primjenu trigonometrijske formule (33) iz Repet. element. matematike dobijemo:

$$D_x \cos x = -\sin x. \tag{96}$$

(Izvedi to !).

f) Derivacija umnoška dviju funkcija $u(x)$ i $v(x)$.

Prema (89) dobijemo za $y = u(x)\cdot v(x)$:

$$D_x(u\cdot v) = uv' + vu'. \tag{97}$$

Pamti deriviranje umnoška ovako:

Prva se funkcija prepiše pa se pomnoži s derivacijom druge funkcije, iza toga se piše + pa se prepiše druga funkcija i pomnoži s derivacijom prve funkcije, ili kraće: prvi množitelj se prepiše, drugi derivira + drugi prepiše, prvi derivira.

Primjeri:

1) $y = x^3 \sin x$
$y' = x^3 \cos x + \sin x \cdot 3x^2$
$\underline{y' = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x.}$

2) $y = \sin x \cdot \cos x$
$y' = \sin x \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot \cos x$
$y' = -\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$
$y' = \cos^2 x - \sin^2 x$

ili

$\underline{y' = \cos 2x.}$

Poseban slučaj: $u = C$ (konstanta), tj. jedan množitelj je konstantan:

$$y = C \cdot v$$

Prema (97) i (93):

$$y' = C \cdot v' + v \cdot 0$$
$$y' = C \cdot v' \quad \text{ili}$$
$$D_x (C \cdot v) = C \cdot v'. \qquad (98)$$

To znači: Konstanta, koja množi funkciju, prepiše se pri deriviranju, dok konstanta, koja se pribraja ili oduzima od funkcije pri deriviranju otpada.

Npr.

$y = 3x^5$
$y' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$

$y = 7 \sin x$
$y' = 7 \cos x$

$y = x^5 \pm 3$
$y' = 5x^4 \pm 0 = 5x^4$

$y = \sin x \pm 7$
$y' = \cos x.$

Sada znamo derivirati polinom:

Primjer:

$P_8(x) = 3x^8 - 2x^6 + x^3 - 2x + \frac{9}{5}$
$P_8'(x) = 3 \cdot 8x^7 - 2 \cdot 6x^5 + 3x^2 - 2$
$\underline{P_8'(x) = 24x^7 - 12x^5 + 3x^2 - 2.}$

Odredimo sada derivaciju umnoška od 3 i više množitelja

$$y = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$$
$$y' = (u \cdot v \cdot w)' = [(u \cdot v) \cdot w]'$$

Prema (97) dobijemo:

$$y' = (uv) \cdot w' + w(uv)' = uvw' + w(uv' + vu')$$
$$y' = uvw' + uwv' + vwu'. \qquad (97a)$$

Na sličan način dobijemo:

$$(u \cdot v \cdot w \cdot z)' = uvwz' + uvzw' + uwzv' + vwzu' \qquad (97b)$$

itd. (Izvedi to!)

Primjer:

$$y = 5x^2 \sin x \cos x$$

$$y' = 5\,[x^2 \sin x\,(-\sin x) + x^2 \cos x \cos x + \sin x \cos x \cdot 2x]$$

$$y' = 5x\,[-x \sin^2 x + x \cos^2 x + 2 \sin x \cos x]$$

$$y' = 5x\,[x\,(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin 2x]$$

$$\underline{y' = 5x\,(x \cos 2x + \sin 2x).}$$

g) Derivacija kvocijenta dviju funkcija $u(x)$ i $v(x)$.

Prema (89) dobijemo za $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$:

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}. \qquad (99)$$

Pamti derivanje razlomka ovako:

Razlomkova crta; dolje — nazivnik na kvadrat; gore — nazivnik puta derivacija brojnika m i n u s brojnik puta derivacija nazivnika.

h) Kao primjer izvedimo derivacije funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{cgt} x$:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Prema (99) i s obzirom na (95) i (96) imamo:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D_x \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (100)$$

Dokaži na isti način, da je

$$D_x \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (101)$$

Primjeri

1.
$$y = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$y' = \frac{(x+1) \cdot 3x^2 - (x^3 + 1) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

Deriviranje je dovršeno. Sada treba još rezultat urediti:

$$y' = \frac{(x+1)\;3x^2 - (x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(3x^2 - x^2 + x - 1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} =$$

$$= \frac{x^2 + x^2 + x - 1}{x + 1} = \frac{x(x+1) + (x^2 - 1)}{x + 1} = \frac{x(x+1) + (x+1)(x-1)}{x + 1} =$$

$$= \frac{(x+1)(x + x - 1)}{x + 1} = \underline{2x - 1.}$$

Pokus: Kako je $y = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1} = \dfrac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = x^2 - x + 1$, $y' = \underline{2x - 1}.$

2.
$$y=\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}.$$

$$y'=\frac{(a^2+x^2)(-2x)-(a^2-x^2)\cdot 2x}{(a^2+x^2)^2}=\frac{2x(-a^2-x^2-a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^2}=-\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2}.$$

i) Posebni slučajevi derivacije kvocijenta.

1. U razlomku $\frac{u}{v}$ nazivnik $v=c$ (konstanta), tj. $y=\frac{u}{c}$, a to možemo pisati i ovako:

$$y=\frac{1}{c}\cdot u \text{ i prema (98) imamo:}$$

$$y'=\frac{1}{c}\cdot u'=\frac{u'}{c}.$$

Dakle:

$$D_x\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}u'=\frac{u'}{c}. \qquad (102)$$

Ako je nazivnik konstanta, deriviraj po pravilu za umnožak konstante i funkcije, a nikako po pravilu za kvocijent funkcija.

Primjeri.

1.
$$y=\frac{\sin x}{3}$$

$$y'=\frac{1}{3}\cos x=\frac{\cos x}{3}.$$

2.
$$y=\frac{7x^3-5x^2+2x-3}{a^2-ab+b^2}$$

$$y'=\frac{21x^2-10x+2}{a^2-ab+b^2}.$$

2. U razlomku $\frac{u}{v}$ brojnik $u=c$ (konstanta), tj. $y=\frac{c}{v}$.

Prema (99) i (93) dobijemo:

$$y'=\frac{v\cdot 0-c\cdot v'}{v^2}=-\frac{c\cdot v'}{v^2}.$$

Dakle

$$D_x\frac{c}{v}=-\frac{c\cdot v'}{v^2}. \qquad (103)$$

Vidimo, ako je brojnik konstanta, tada otpada u derivaciji kvocijenta prvi član brojnika, pa nema smisla da ga pišemo pa množimo s nulom.

Primjeri.

1.
$$y=\frac{3}{\sin x}, \qquad y'=\frac{-3\cos x}{\sin^2 x}.$$

2.
$$y=\frac{a^2+ab+b^2}{x^2-3x+5}$$

$$y'=\frac{-(a^2+ab+b^2)(2x-3)}{(x^2-3x+5)^2}.$$

Sada možemo lako pokazati, da formula (92) za derivaciju potencije s pozitivnim cijelim eksponentom $D_x x^n = nx^{n-1}$ vrijedi i za potencije s negativnim cijelim eksponentima, tj. za

$$y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}.$$

Prema (103)

$$y'=-\frac{1\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=-n\cdot x^{n-1}\cdot x^{-2n}=-n\,x^{n-1-2n}=-n\,x^{-n-1}$$

$$D_x\, x^{-n}=-n\,x^{-n-1}. \qquad (104)$$

Npr.

$$y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

$$y'=-1\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

$$D_x\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}. \qquad (105)$$

$$y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$$

$$y'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}.$$

j) Derivacija logaritamske funkcije $y=\log_a x$

Prema (89) računamo:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x$$

ili

$$\Delta y=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\ \Big|\ :\Delta x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Desnu stranu jednakosti množimo i dijelimo s x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

ili

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Prelazimo na limes, pustivši da $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

ili prema (87b), jer je $\log_a x$ neprekinuta funkcija:

$$y' = \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

Stavimo li $\frac{x}{\Delta x} = u$, bit će $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{u}$, a kad $\Delta x \to 0$, $u \to \infty$. Osim toga je prema (22):

$$\lim_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

Dobijemo konačno

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e,$$

odnosno

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e. \tag{106}$$

Neka je:

1. Baza $a = e$, tj. imamo prirodne logaritme.

Dobijemo iz (106):

$$D_x \ln x = \frac{1}{x}, \tag{107}$$

jer je $\log_e e = \ln e = 1$.

2. Baza $a = 10$, tj. imamo dekadske logaritme.

Prema (106) imamo:

$$D_x \log x = \frac{M}{x}, \tag{108}$$

jer je prema (74) $\log e = M$.

5. DERIVACIJE INVERZNIH FUNKCIJA

a) Općenito

Neka je $y = y(x)$ zadana funkcija s derivacijom $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tada je $x = x(y)$ njena inverzna funkcija, kojoj je derivacija $x' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Možemo pisati:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Prelazimo na limes pustivši da $\Delta y \to 0$. Jasno je, da će tada i Δx težiti nuli.

Dobijemo prema (26):

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

ili

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}, \text{ a odatle je također } y'(x) = \frac{1}{x'(y)}.$$

Dobili smo dakle:

$$D_y x(y) = \frac{1}{D_x y(x)}$$

ili (109)

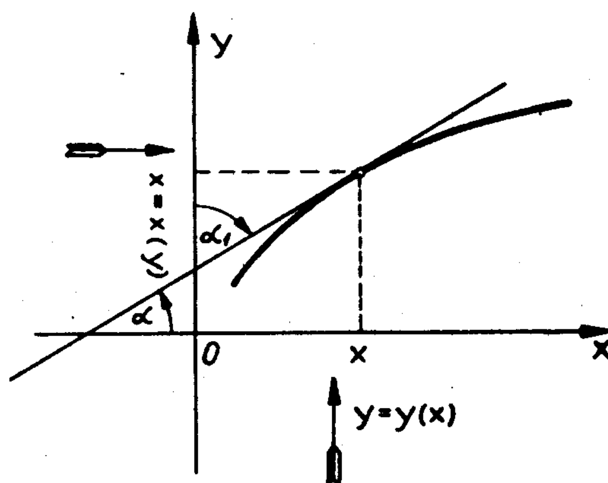
$$D_x y(x) = \frac{1}{D_y x(y)},$$

ili

$$D_y x(y) \cdot D_x y(x) = 1.$$

Derivacija inverzne funkcije jednaka je recipročnoj vrijednosti derivacije zadane funkcije.

Do istog rezultata možemo doći i geometrijskim putem.



Sl. 102.

Prema slici 102 uzevši u obzir da je $y' = \operatorname{tg} \alpha$ imamo

$$x'(y) = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{y'(x)}.$$

b) Derivacije ciklometrijskih funkcija

1) $y = \arcsin x$; $y = ?$

U direktnom obliku $x = \sin y$ (a)

Prema (109):

$$D_x \arcsin x = \frac{1}{D_y \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \text{prama (a)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dakle

$$D_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (110)$$

2) $y = \arccos x; \quad y' = ?$
Prema (70):

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

a odatle:

$$D_x \arccos x = 0 - D_x \arcsin x.$$

Prema (110) imamo konačno:

$$D_x \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (111)$$

3) $y = \operatorname{arc\,tg} x; \quad y' = ?$
U direktnom obliku: $\qquad x = \operatorname{tg} y. \qquad$ (b)

Prema (109) i (100):

$$D_x \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{D_y \operatorname{tg} y} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \text{prema (b)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dakle:

$$D_x \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (112)$$

4) $y = \operatorname{arc\,ctg} x$
Prema (71):

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x,$$

a odatle

$$D_x \operatorname{arc\,ctg} x = 0 - D_x \operatorname{arc\,tg} x.$$

Prema (112) imamo:

$$D_x \operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (113)$$

c) Derivacije eksponencijalnih funkcija

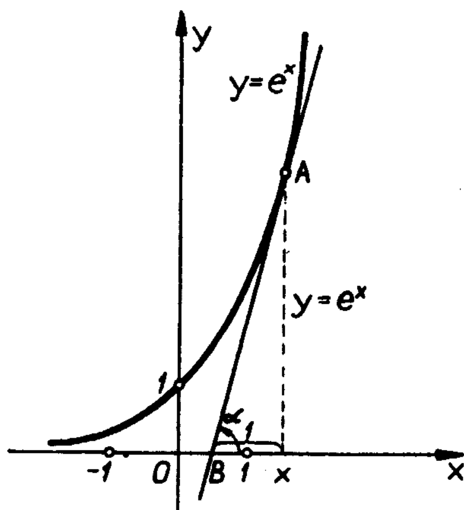
Traži se derivacija funkcije $y = a^x$. Po definiciji logaritma (vidi § 6. 2,b) dobijemo inverznu funkciju:

$$x = \log_a y,$$

a sada prema (109) i (106) imamo:

$$D_x a^x = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \text{prema (78)} = y \cdot \log_e a = a^x \cdot \ln a.$$

$$D_x a^x = a^x \cdot \ln a. \qquad (114)$$



Sl. 103.

Pamti ovako: prepiši puta ln baze.

Uvrstimo u (114) $a = e$:

$$D_x e^x = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$$

$$D_x e^x = e^x. \qquad (115)$$

$y = e^x$ je jedina funkcija, kojoj je derivacija jednaka samoj funkciji.

Geometrijski to znači, da je ordinata funkcije e^x u bilo kojoj tački jednaka gradijentu tangente povučene na krivulju u toj tački, jer je $y = e^x = y' = \operatorname{tg} \alpha$. Odatle slijedi jednostavna konstrukcija tangente na krivulju $y = e^x$ u nekoj tački apscise x, koja je prikazana na slici 103.

Nanesemo li lijevo od apscise x zadane tačke A krivulje jedinicu na os X, pa spojimo li pravcem tako dobivenu tačku B s tačkom A, bit će pravac AB tangenta na krivulju $y = e^x$, jer je prema slici i (115):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e^x}{1} = e^x = y'.$$

6. DERIVACIJE HIPERBOLNIH FUNKCIJA

a) $$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Prema (115) i uzevši u obzir, da je $D_x e^{-x} = -e^{-x}$ što ćemo malo kasnije pokazati (vidi 8, c) primjer 4). imamo:

$$y' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$D_x \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x. \qquad (116)$$

b) $$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Na isti način dobijemo:

$$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

$$D_x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x. \qquad (117)$$

Pazi na predznak rezultata!

c) $$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Prema (99), (116) i (117) imamo:

$$y' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \text{prema (61)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$D_x \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. \qquad (118)$$

d) $$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Na isti način dobijemo:

$$D_x \operatorname{cth} x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \qquad (119)$$

(Dokaži to!)

7. DERIVACIJE AREA-FUNKCIJA

a) $y = \operatorname{Ar sh} x,$

a u direktnom obliku $x = \operatorname{sh} y.$ (a)

Prema (109):

$$D_x \operatorname{Ar sh} x = \frac{1}{D_y \operatorname{sh} y} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \text{prema (62)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \text{prema (a)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

$$D_x \operatorname{Ar sh} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \qquad (120)$$

b) $y = \operatorname{Ar ch} x.$

Na isti način dobijemo:

$$D_x \operatorname{Ar ch} x = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}. \qquad (121)$$

(Dokaži to!)

Ispred drugog korijena pišemo oba predznaka, jer je $\operatorname{Ar ch} x$ dvoznačna funkcija pa ima za svaki $x > 1$ dvije tangente.

c) $$D_x \operatorname{Ar th} x = \frac{1}{1 - x^2}. \qquad (122)$$

za $|x| < 1$ (Vidi dalje str. 147).

d) $$D_x \operatorname{Ar cth} x = \frac{1}{1 - x^2} \qquad (123)$$

za $|x| > 1$. (Vidi dalje str. 147).

8. SLOŽENE FUNKCIJE

a) Pojam složene funkcije

Složena funkcija je funkcija od funkcije, npr. $y = \sin x^2$ je složena funkcija, jer stavimo li $x^2 = u$, dobijemo $y = \sin u$, gdje je $u = x^2$.

Analogno: $y = \sin^2 x$ je također složena funkcija, jer možemo pisati

$$y = u^2, \quad \text{gdje je} \quad u = \sin x.$$

Na isti način

$$y = \ln \cos x$$
$$y = \ln u$$
$$u = \cos x.$$

Općenito: Ako je y funkcija od u, $[y = f(u)]$, a u funkcija od x, $[u = \varphi(x)]$, tada je i y funkcija od x. U tom slučaju se kaže, da je y **složena funkcija od** x.

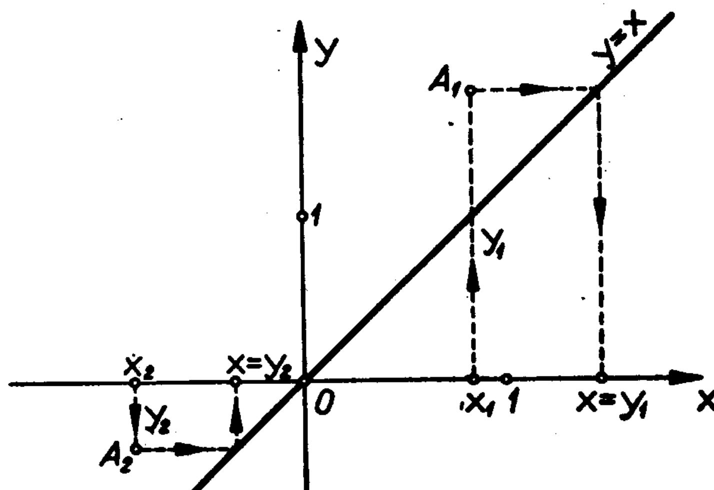
Uvrštenje $u = \varphi(x)$ u $y = f(u)$, daje $y = f[\varphi(x)]$, tj. y je funkcija f od funkcije φ.

Složena funkcija može biti sastavljena i od više funkcija, npr.

$$y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$$
$$y = \arcsin u$$
$$u = \sqrt{v}$$
$$v = 1 - x^2.$$

b) Konstrukcija grafa složene funkcije

Graf složene funkcije može se naravno konstruirati običnim putem, tj. računajući i nanašajući koordinate pojedinih tačaka krivulje, ali mnogo je jednostavniji drugi način, koji se sastoji u tome, da se posebno nacrtaju grafovi pojedinih funkcija iz kojih se sastoji zadana složena funkcija, pa



Sl. 104.

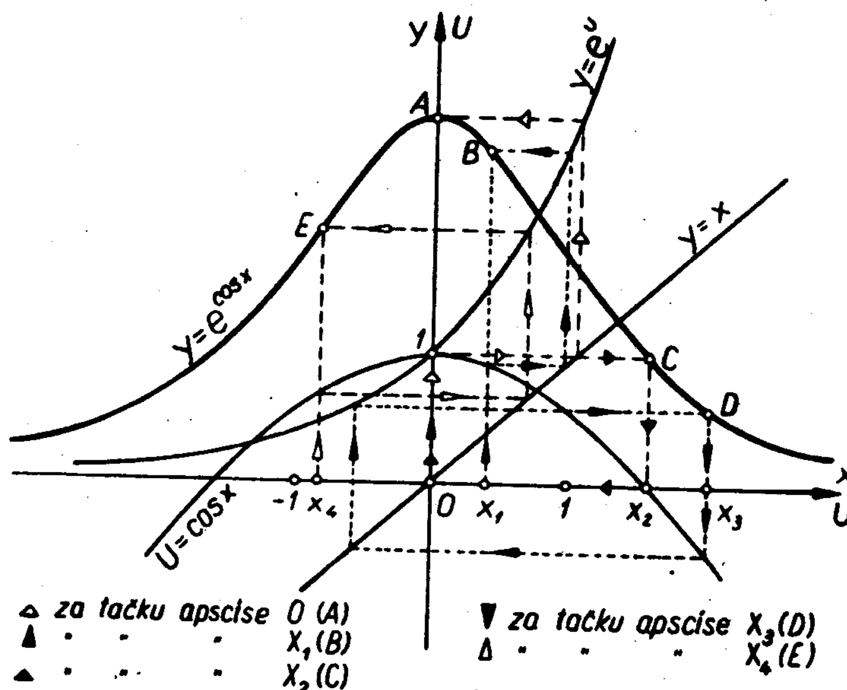
se iz tih grafova konstruira graf složene funkcije. Pokažimo taj način na primjeru uzevši u obzir da pomoću pravca $y = x$ možemo ordinatu y bilo koje tačke A prenijeti na os X, kako se to vidi iz slike 104.

Primjer. $\quad y = e^{\cos x}$

Slijedi: $\quad y = e^u$

$\quad u = \cos x.$

Označivši os X koordinatnog sustava XOY s U, crtamo u tom koordinatnom sustavu UOY graf funkcije $y = e^u$, iza toga označivši os Y s U, crtamo u tom koordinatnom sustavu XOU graf funkcije $u = \cos x$. Sada na način prikazan na sl. 105 konstruiramo pojedine tačke zadane složene funkcije $y = e^{\cos x}$, koja je taka, pa je graf simetričan na os Y.



Sl. 105.

Na sličan način konstruiraju se grafovi onih složenih funkcija, koje se sastoje od više dijelova.

Grafovi pojedinih dijelova crtaju se opet u istom koordinatnom sustavu XOY, mijenjaju se samo nazivi osiju.

Primijetimo još, da možemo uzeti r a z l i č i t e jedinice na osima X i Y. U tom slučaju pravac $y = x$ nije više raspolovnica I i III kvadranta.

Konstruiraj npr. graf funkcije $y = \sin^2 (2x - 1)$.

Slijedi:

$$y = u^2$$
$$u = \sin v$$
$$v = 2x - 1.$$

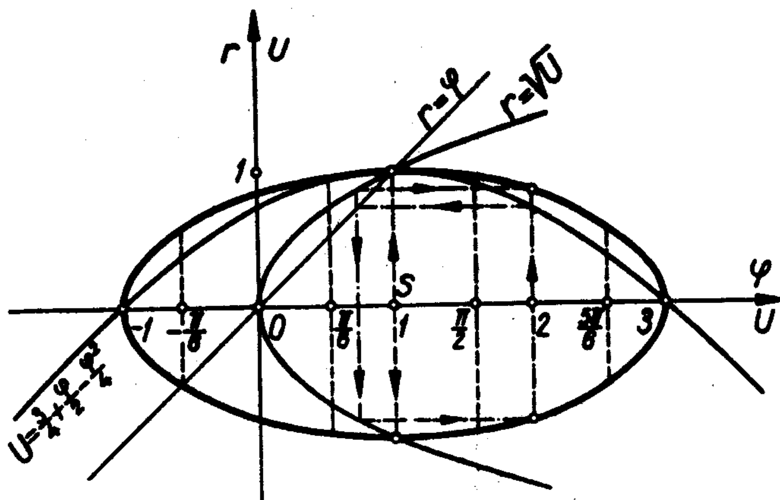
Složena funkcija može biti zadana i u polarnim koordinatama.

Primjer.

$$r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{4}}$$
$$r = \sqrt{u}$$
$$u = \frac{3}{4} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{4}.$$

Graf te složene funkcije nacrtamo najprije u pravokutnom koordinatnom sustavu, a zatim ga prenesemo u polarni sustav.

Nacrtavši obje parabole, konstruiramo u istom koordinatnom sustavu na način prikazan u prednašnjem primjeru graf zadane složene funkcije. Graf kvadratne funkcije crtamo na način naveden na stranicama 45 i 46, dok graf druge parabole lako dobijemo računajući pojedine tačke.



Sl. 106.

Kako se vidi iz slike, za graf zadane složene funkcije dobili smo u pravokutnom koordinatnom sustavu elipsu sa središtem S (1,0) i s poluosima $a = 2$ i $b = 1$. Da se u to uvjerimo, transformirajmo zadanu funkciju na način koji slijedi.

$$r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{4}} \Big/ ^2$$

ili

$$r^2 = \frac{3}{4} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{4}$$

$$\frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi}{2} + r^2 = \frac{3}{4}$$

odatle

$$\frac{1}{4}(\varphi^2 - 2\varphi) + r^2 = \frac{3}{4}$$

ili

$$\frac{1}{4}(\varphi - 1)^2 + r^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

ili

$$\frac{(\varphi - 1)^2}{4} + \frac{r^2}{1} = 1,$$

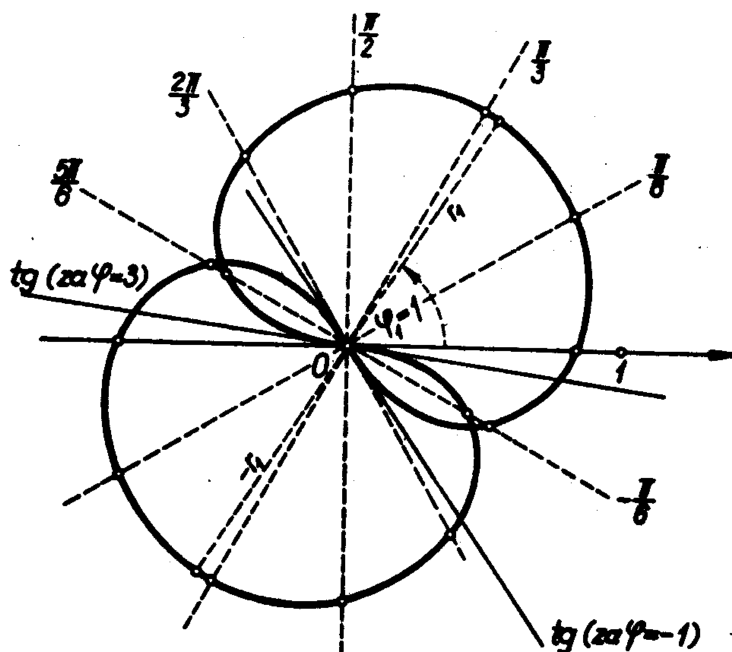
a to je elipsa, koju smo dobili grafičkim putem.

Primijetimo, da bi graf zadane funkcije bila hiperbola, ako bi koeficijent od φ^2 bio pozitivan. Pokaži to! (vidi sl. 89 i primjer uz tu sliku).

Sada prenesimo graf zadane funkcije iz pravokutnog u polarni koordinatni sustav uzimajući iz grafa za po volji odabrane vrijednosti φ pripadne vrijednosti r. Budući da ćemo vrijednosti φ dobivati u lučnoj mjeri, pre-

tvarat ćemo ih prema formuli (37) u kutove pomoću logaritamskog računala, dok lučnu mjeru mnogih kutova znamo napamet: arc $30^0 = \frac{\pi}{6}$, arc $57,3^0 = 1$, arc $60^0 = \frac{\pi}{3}$ itd.

Pri nanašanju vrijednosti r uzimamo u obzir, da se negativne r nanašaju u suprotnom smislu, tj. za negativne r kut se povećava za 180^0. Graf u polarnim koordinatama crtamo u dvaput većem mjerilu, da slika funkcije bude preglednija. Vidi sl. 107.



Sl. 107.

c) Derivacije složenih funkcija

Neka je zadana složena funkcija $y = y(u)$, gdje je $u = u(x)$ i neka postoje derivacije $y'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ i $u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Traži se $y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Možemo pisati:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Prelazimo na limes pustivši da $\Delta x \to 0$. Uzevši u obzir, da kad $\Delta x \to 0$, tada i $\Delta u \to 0$, imamo prema (24):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

ili

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

ili

$$D_x y(x) = D_u y(u) \cdot D_x u(x). \qquad (124)$$

§ 11.

DERIVACIJE VIŠEG REDA

Druga derivacija y'' je derivacija od prve derivacije y', treća derivacija y''' je prva derivacija od druge derivacije y'', ili druga derivacija od prve derivacije, itd.

Navedimo nekoliko primjera.

1.
$$P_3\ (x) = 7x^3 - 8x^2 + 7x - 5$$
$$P_3'\ (x) = 7 \cdot 3x^2 - 16x + 7$$
$$P_3''\ (x) = 7 \cdot 3 \cdot 2x - 16$$
$$P_3'''(x) = 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 7 \cdot 3!$$
$$P_3^{(4)}(x) = 0.$$

Općenito:

$$P_n^{(n)}(x) = a_n \cdot n! \qquad P_n^{(n+1)}(x) = 0. \tag{180}$$

Npr.

$$P_5(x) = 11x^5 - 13x^4 + 8x^3 - 7$$
$$P_5^{(5)}(x) = 11 \cdot 5! = 1320;$$
$$P_5^{(6)}(x) = 0.$$

2. Traži se n-ta derivacija od $\sin x$.

$$y = \sin x$$
$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y^{(5)} = \cos x = \sin\left(x + 5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \text{ itd.}$$

Slijedi:

$$D_x^{(n)} \sin x = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad (131)$$

Npr.

$$D_x^{(7)} \sin x = \sin\left(x + 7 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \underline{\underline{-\cos x.}}$$

3. Dokaži na sličan način, da je

$$D_x^{(n)} \cos x = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \qquad (132)$$

Npr. $D_x^{(10)} \cos x = D_x^{(2)} \cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{-\cos x.}}$

Izračunaj:

1. y'' za

a) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \left[\dfrac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\right]$

b) $y = e^{-x^2}$ $\qquad [2e^{-x^2}(2x^2-1)]$

c) $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$ $\qquad \left[-\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)\right]$

d) $y(0)$, $y'(0)$ i $y''(0)$ za $y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$ $\qquad [1;\ 1;\ 0]$

2. Dokaži da funkcija $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, gdje su C_1 i C_2 konstante po volji, zadovoljava jednadžbu $y'' + y = 0$.

§ 12.

ROLLEOV TEOREM

Ako je funkcija $f(x)$

1) jednoznačna i neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$,
2) ima u svakoj tački tog intervala određenu konačnu derivaciju $f'(x)$,
3) poništava se na početku i na kraju intervala $[a, b]$, tj.

$$f(a) = 0 \quad \text{i} \quad f(b) = 0,$$

tada postoji u nutrini intervala bar jedna tačka apscise c, u kojoj se poništava prva derivacija funkcije, tj.

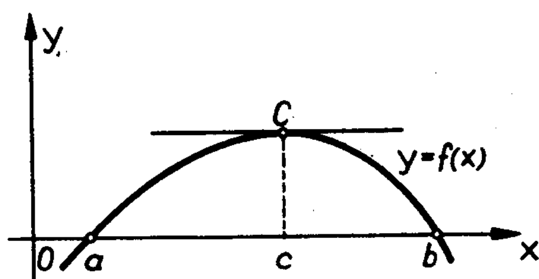
$$f'(c) = 0, \quad \text{gdje je} \quad a < c < b,$$

dok tačnije tačka apscise c nije određena.

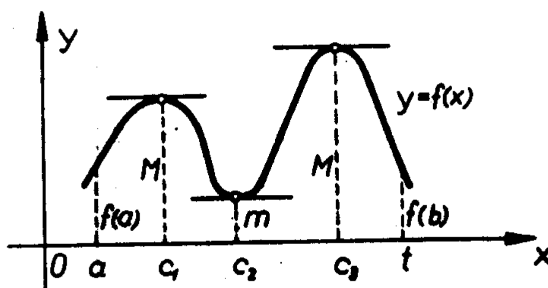
Slika 108 prikazuje funkciju, koja odgovara svim uvjetima Rolleova teorema.

Iz te slike slijedi geometrijsko značenje Rolleova teorema: uz gore navedena tri uvjeta uvijek postoji na krivulji $f(x)$ između a i b bar jedna tačka C apscise c, u kojoj je tangenta paralelna s osi X, pa je u tački C:

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 0 = 0.$$



Sl. 108.



Sl. 109.

Slika 109 pokazuje, da između a i b može biti i više tačaka apscisa c_1, c_2, c_3 u kojima se poništava prva derivacija funkcije (stoga teorem kaže: „bar jedna tačka") i da teorem vrijedi i u tom slučaju, kad se funkcija ne poništava na početku i na kraju intervala, već ima u tim tačkama jednake vrijednosti, tj. kad je $f(a) = f(b)$.

$$f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

U tačkama ekstrema funkcije tj. u tačkama maksimuma M i minimuma m funkcije prva derivacija funkcije je jednaka nuli, jer je u tim tačkama krivulje tangenta paralelna s osi X (vidi sl. 108 i 109).

Primjeri.

1. Funkcija $f(x) = x^3 - 4x$
odgovara u intervalu $[a = -2, b = +2]$ svim uvjetima Rolleova teorema, jer u tom zatvorenom intervalu

1.) jednoznačna je i neprekinuta,
2.) ima u svakoj tački određenu konačnu derivaciju,
3.) poništava se na početku i kraju toga intervala:

$$f(-2) = -8 + 8 = 0$$
$$f(+2) = +8 - 8 = 0.$$

Stoga se derivacija zadane funkcije mora poništavati bar u jednoj tački apscise x koja leži u intervalu od -2 do $+2$.

Da to pokažemo računamo:

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

i stavimo

$$3x^2 - 4 = 0$$

Dobijemo:

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

odatle

$$x_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Derivacija zadane funkcije poništava se u tačkama:

$$x_1 = c_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{i} \quad x_2 = c_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Nariši graf funkcije $y = x^3 - 4x$ i označi tačke apscise c_1 i c_2.

2. Funkcija $f(x) = x^3 + 3x + 1$ u intervalu $[a = -1, b = 1]$ jednoznačna je i neprekinuta, ima u svakoj tački derivaciju, ali treći uvjet nije ispunjen, jer je $f(-1) = -3$, dok je $f(+1) = 5$, pa se derivacija funkcije ne poništava. Da se u to uvjerimo, računajmo $f'(x) = 3x^2 + 3$ i stavimo $3x^2 + 3 = 0$.

Dobijemo $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Derivacija funkcije se nigdje ne poništava.

Nariši graf funkcije.

§ 13.

TEOREM SREDNJE VRIJEDNOSTI

Ako je funkcija $f(x)$

1) jednoznačna i neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$,

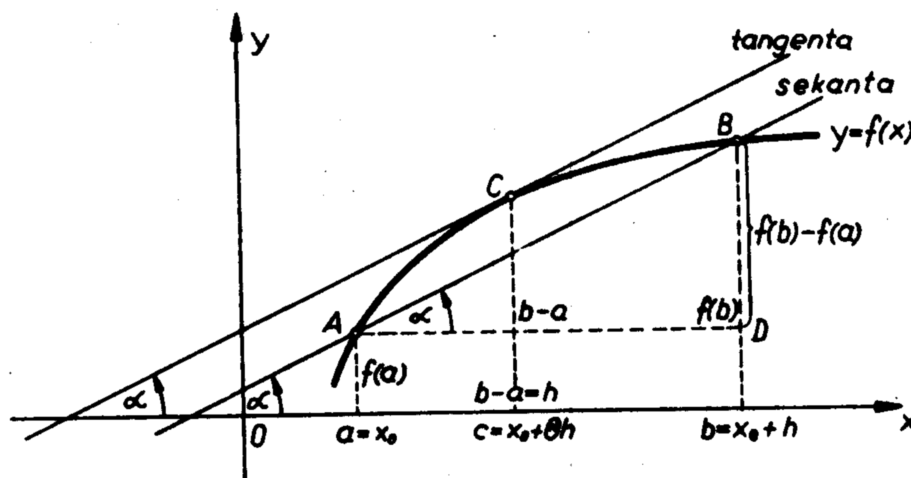
2) ima u svakoj tački tog intervala određenu konačnu derivaciju,

tada vrijedi za tu funkciju bar u jednoj tački apscise c, koja leži u nutrini intervala $[a, b]$, slijedeća jednakost:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

gdje je $a < c < b$, dok tačnije tačka apscise c nije određena.

Slika 110 prikazuje funkciju, koja odgovara uvjetima teorema srednje vrijednosti.



Sl. 110.

Iz te slike slijedi geometrijsko značenje teorema:

Prav. $\triangle$ ADB: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha =$ gradijent sekante AB.

Znamo da je derivacija $f'(c)$ gradijent tangente povučene na krivulju $f(x)$ u tački C apscise c, gdje je $a < c < b$.

Jednakost $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ znači dakle geometrijski, da uz gornja dva uvjeta teorema uvijek postoji bar jedna tačka C krivulje $f(x)$, u kojoj je tangenta paralelna sa sekantom AB, koja prolazi krajnjim tačkama luka krivulje.

Prikažimo teorem srednje vrijednosti u drugom obliku. U tu svrhu uvedimo novu oznaku (vidi sl. 110 i 111).

Neka je

$$a = x_0, \text{ tada je } f(a) = f(x_0),$$
$$b - a = h, \text{ tada je } b = a + h = x_0 + h, \text{ pa je } f(b) = f(x_0 + h).$$

Tačka C leži negdje između a i b, tako da je $a < c$, ali $b > c$. Prema tome da dobijemo apscisu c u našoj novoj oznaci, moramo apscisi a dodati neki nama nepoznati dio od h, pa pišemo

$$c = x_0 + \Theta h, \quad \text{gdje je} \quad 0 < \Theta < 1,$$

tj. Θ je neki pravi pozitivni razlomak, inače neodređen (npr. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ itd.).

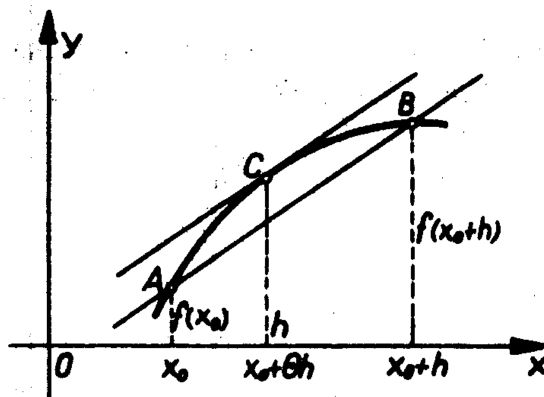
Uvrštenje te oznake u

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ daje:}$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \Theta h) \Big| \cdot h$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \Theta h,)$$

gdje je $0 < \Theta < 1$. (133)



Sl. 111.

Iz slike 111 jasno slijedi novo značenje teorema srednje vrijednosti napisanog u obliku (133) ili (133a):

$$f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(x + \Theta h), \quad 0 < \Theta < 1: \quad (133a)$$

vrijednost funkcije u tački* $x + h$, tj. $f(x + h)$, jednaka je vrijednosti funkcije u tački x, tj. $f(x)$, + duljina intervala h pomnožena s derivacijom funkcije u nekoj srednjoj tački, tj. s $f'(x + \Theta h)$.

Tačka $(x + \Theta h)$, a dakle i derivacija funkcije u toj tački, tj. $f'(x + \Theta h)$, ostaje neodređena, a ipak na temelju teorema srednje vrijednosti možemo izvesti neke zaključke o funkciji $f(x)$.

Primjer vidi dalje.

Uzmimo poseban slučaj:

Neka je $x = 0$, tj. tačka A neka leži na osi Y, tada mjesto h možemo pisati x, pa teorem srednje vrijednosti (133a) prima oblik:

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(\Theta x), \quad 0 < \Theta < 1 \quad (133b)$$

Kasnije ćemo vidjeti (§ 20, 8) da je teorem srednje vrijednosti u obliku (133) poseban slučaj Taylorove formule, a u obliku (133b) — Mac Laurinove.

Primjer.

Primijeni za funkciju $f(x) = \sin x$ teorem srednje vrijednosti u obliku (133b):

Kako je $f(0) = \sin 0 = 0$, a $f'(\Theta x) = \cos(\Theta x)$, dobijemo:

$$\sin x = x \cdot \cos(\Theta x)$$

ili u apsolutnim vrijednostima

$|\sin x| = |x| \cdot |\cos(\Theta x)|$, a kako je uvijek $|\cos(\Theta x)| \leqq 1$,

$|\sin x| \leqq |x|$,

tj. $|\sin x|$ nikad nije veći od svog argumenta $|x|$ (naravno u lučnoj mjeri)

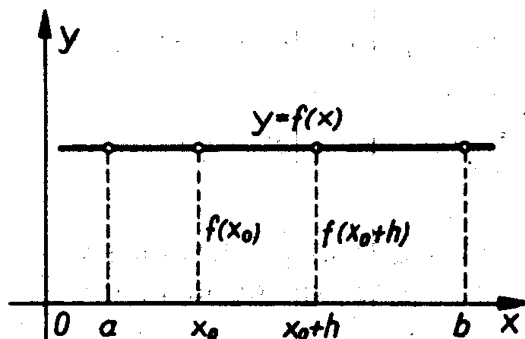
Za $|x|$ dovoljno malen, možemo uzeti, da je $|\cos(\Theta x)| \doteq 1$, pa je $|\sin x| \doteq |x|$ za dovoljno malene $|x|$.

Računske vrijednosti potvrđuju taj zaključak: za kutove od 0^0 do 2^0 $\sin x = x$ na 5 decimala tačno. Npr.:

$$\sin 1^0 = 0{,}01745, \quad \text{a} \quad x = \text{arc } 1^0 = 0{,}01745.$$

Iz teorema srednje vrijednosti slijedi:

1) Funkcija, čija je derivacija u svim tačkama intervala $[a, b]$ jednaka nuli, konstantna je u tom intervalu. Grafički je to posve jasno: $f'(x) = 0$ u svim tačkama intervala $[a, b]$ znači, da je tangenta na graf funkcije usporedna s osi X, a to je samo tako moguće da je funkcija posve usporedna s osi Y, dakle funkcija je konstantna (vidi sl. 112).



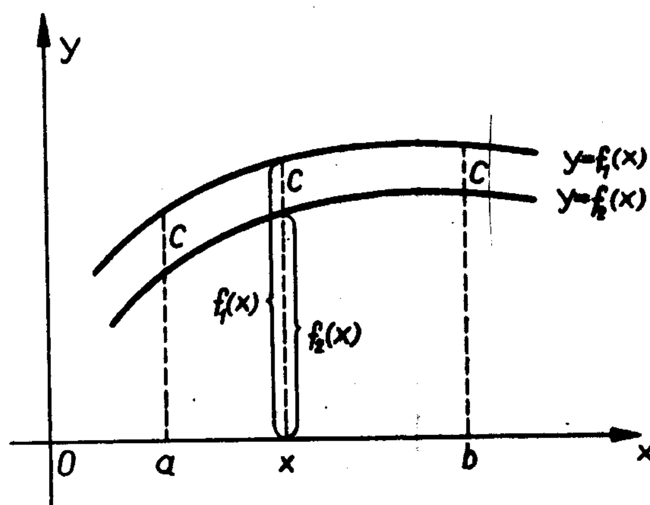
Sl. 112.

Pokažimo isto analitički: neka su x_0 i $x_0 + h$ bilo koje dvije tačke u nutrini intervala $[a, b]$. Kako je $f'(x) = 0$ u svim tačkama intervala $[a, b]$, bit će i $f'(x_0 + \Theta h) = 0$, jer je $x_0 + \Theta h$ neka tačka između x_0 i $x_0 + h$. Uvrštenje $f'(x + \Theta h) = 0$ u (133a) daje:

$$f(x) = f(x + h) = \text{konstanta}.$$

2) Dvije funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$, koje imaju u svim tačkama intervala $[a, b]$ identične, određene i konačne derivacije, razlikuju se za konstantu.

Grafički: $f_1'(x) = f_2'(x)$ u intervalu $[a, b]$ znači da su tangente na te krivulje međusobno usporedne u tačkama istih apscisa, krivulje su dakle međusobno također usporedne, pa je razlika njihovih ordinata konstanta C (vidi sl. 113).



Sl. 113.

Analitički: Neka je

$$f_1(x) - f_2(x) = \varphi(x).$$

Deriviranje daje:

$$f_1'(x) - f_2'(x) = \varphi'(x),$$

kako je

$$f_1'(x) - f_2'(x) = 0, \text{ bit će i } \varphi'(x) = 0,$$

te iz posljedice 1) slijedi:

$$\varphi(x) = C, \text{ odnosno } f_1(x) - f_2(x) = C \text{ (konstanta)}.$$

Primjer.

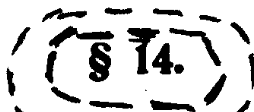
Funkcija $f(x) = x^3$ odgovara u intervalu $[a = -2; b = +2]$ obim uvejtima teorema srednje vrijednosti pa mora biti

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{2^3 - (-2)^3}{2 - (-2)} = 4.$$

Odredimo $c: f'(x) = 3x^2 = 4$, odatle je $x_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

U tim je tačkama tangenta na kubnu parabolu paralelna sa sekantom $AB[A(-2, -8); B(2, 8)]: y = 4x$.

Prikaži grafički funkciju, sekantu i tangentu.



NEPREKINUTOST I DERIVACIJA

Ako je funkcija $f(x)$ jednoznačna i ima u nekoj tački konačnu derivaciju, ona je u toj tački neprekinuta.

Prema tome postojanje konačne derivacije povlači sa sobom neprekinutost funkcije.

Dokazali smo, npr., da je $\cos x$ derivacija funkcije $\sin x$, a kako je uvijek $|\cos x| \leq 1$, $\sin x$ je neprekinuta funkcija za sve x.

Obrat ne vrijedi. To znači: ako je funkcija u nekoj tački neprekinuta, ona u toj tački može, ali ne mora imati derivaciju.

Npr., dokazali smo da je funkcija $y = |x|$ neprekinuta u tački $x = 0$ (vidi str. 102), ali derivaciju u toj tački ta funkcija nema, jer limes kvocijenta diferencija ima jednu vrijednost kad $\Delta x \to +0$, a drugu vrijednost, kad $\Delta x \to -0$, tj. kad $\Delta x \to 0$ s desna, odnosno s lijeva:

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} 45^0 = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} 135^0 = -1 \qquad \text{(vidi sl. 81).}$$

Kako je za postojanje limesa potrebno, da limesi s desna i s lijeva imaju iste vrijednosti, zaključujemo, da funkcija $y = |x|$ nema derivacije u ishodištu, iako je u toj tački neprekinuta; u svim drugim tačkama derivacija postoji i jednaka je $+1$ za $x > 0$, odnosno -1 za $x < 0$.
Kako je derivacija gradijent tangente, a derivacija za $x = 0$ ne postoji, graf funkcije $y = |x|$ nema ni tangente u ishodištu, jer prolazom kroz ishodište graf funkcije naglo mijenja svoj smjer od $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 45^0 = +1$ na $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 135^0 = -1$.

GEOMETRIJSKA PRIMJENA DERIVACIJE

U § 10, 3 naveli smo više primjera za određivanje jednadžbi tangenata i normala na zadane krivulje u zadanim diralištima. Sad navedimo nekoliko primjera određivanja jednadžbi tangente i normale kad diralište nije zadano.

Primjeri.

1. Napiši jednadžbe tangenata na kubnu parabolu $y = x^3 + x - 2$ koje su paralelne s pravcem $y = 4x - 1$.

Prema (90): $t \equiv y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$

Zadatak se svodi na određivanje koordinata dirališta x_1 i y_1, jer je $y'(x_1) = 4$ zadano.

Računamo $y' = 3x^2 + 1$

Uvrštenje $y = 4$ daje $4 = 3x^2 + 1$, odatle $x^2 = 1$ pa je $x_{1,2} = \pm 1$.

Uvrštenje u jednadžbu kubne parabole daje ordinate dirališta $y_1 = 0$ i $y_2 = -4$

Dirališta su određena: $D_1(1, 0)$ i $D_2(-1, -4)$.

Prema (90) imamo: $t_1 \equiv y - 0 = 4(x - 1)$ ili $\underline{y = 4x - 4}$

$t_2 \equiv y + 4 = 4(x + 1)$ ili $\underline{y = 4x}$

Prikaži grafički funkciju, zadani pravac i tangente.

2. Napiši jednadžbu tangente na kubnu parabolu $y = x^3 + 3x^2 - 5$ koja je okomita na pravcu $2x - 6y + 1 = 0$

Napišemo li jednadžbu pravca u eksplicitnom obliku $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$ vidimo, da je prema (91) $y'(x_1) = -3$ pa prema (90) $t \equiv y - y_1 = -3(x - x_1)$; $x_1 = ?$ $y_1 = ?$

$y' = 3x^2 + 6x$, pa je u $x = x_1$, tj. u diralištu $3x^2 + 6x = -3 \mid : 3$

$x^2 + 2x + 1 = 0$, pa je $x_{1,2} = -1$, $y_1 = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 5 = -3$

$t \equiv y + 3 = -3(x + 1)$

$\underline{y = -3x - 6}$

Nariši funkciju, zadani pravac i tangentu.

3. Napiši jednadžbu normale na krivulju $y = x \ln x$ koja je paralelna s pravcem $p \equiv 2x - 2y + 3 = 0$

Iz $p \equiv y = x + \frac{3}{2}$ slijedi da je koeficijent smjera tangente -1 pa je prema (91):

$n \equiv y - y_1 = 1(x - x_1)$ $x_1 = ?$ $y_1 = ?$

$y' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = -1$, odatle $\ln x = -2$, a po definiciji logaritma $x_1 = e^{-2}$.

$y_1 = e^{-2} \ln e^{-2} = e^{-2} \cdot (-2) \ln e = -2e^{-2}$.

Dobijemo $n \equiv y + 2e^{-2} = x - e^{-2}$

$\underline{y = x - 3e^{-2}}$

Prikaži grafički funkciju, zadani pravac i normalu.

4. Tetiva parabole $y = x^2 - 2x + 5$ spaja tačke kojima su apscise $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Napiši jednadžbu tangente, koja je paralelna s tom tetivom i sve prikaži grafički.

$[2x - y + 1 = 0]$

5. Napiši jednadžbu normale na parabolu $y = x^2 - 6x + 6$ koja je okomita na pravcu, što spaja izhodište koordinatnog sustava s vrhom parabole, i sve prikaži grafički.

$[4x - 4y - 21 = 0]$

§ 15.

NEODREĐENI OBLICI. L'HOSPITALOVO PRAVILO

1. OBLICI $\frac{0}{0}$ I $\frac{\infty}{\infty}$

Traži se npr. vrijednost funkcije $y = \frac{\sin x}{x}$ za $x = 0$.

Uvrštenje daje:

$$y(0) = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

što nema smisla, jer s nulom ne smijemo dijeliti.

Isto tako $y = \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ za. $x = 0$ daje

$$y(0) = \frac{\ln 0}{\operatorname{ctg} 0} = \frac{-\infty}{\infty},$$

što također nema određenog smisla.

Funkcija u takvim tačkama dakle nema određene vrijednosti, ona tamo nije definirana. Želimo li funkciji u toj tački dati takvu vrijednost, da bude u toj tački neprekinuta, mora vrijednost funkcije biti jednaka limesu te funkcije, kad x teži dotičnoj vrijednosti. Za određivanje te vrijednosti, koja se naziva „prava vrijednost neodređenog oblika $\frac{0}{0}$, odnosno $\frac{\infty}{\infty}$", vrijedi:

L'Hospitalovo pravilo (čitaj Lopitál):

Neka zadana funkcija y ima oblik kvocijenta $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ i neka je za

$x = a$
$$y(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \text{ ili } \frac{\infty}{\infty},$$

tada je prava vrijednost funkcije y za $x = a$, tj.

$$y(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \text{itd.}, \qquad (134)$$

dok ne dođemo do određene vrijednosti konačne ili beskonačne. Derivira se dakle ne po pravilu kvocijenta, već posebno brojnik i posebno nazivnik, pri čemu se iza svakog deriviranja dobiveni izraz uredi i uvrsti zadani x. Zadatak je riješen, čim dobijemo u brojniku ili u nazivniku konačnu ili beskonačnu vrijednost.

Primjeri:

1.
$$y=\frac{\sin x}{x}\ \text{za}\ x=0.$$

$$y(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=\underline{1.}\qquad\text{(vidi (86))}.$$

2.
$$y=\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}\ \text{za}\ x=0.$$

$$y(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=$$

(uvrštenje $x=0$ daje $\frac{0}{0}$, deriviramo dalje) $=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1}=-\frac{0}{1}=\underline{0.}$

3.
$$y=\frac{3x^5-5x^4+7x^3}{2x^5+x^4-8x^3}\quad\text{za}\ x=0.$$

$$y(0)=\lim_{x\to 0}\frac{3x^5-5x^4+7x^3}{2x^5+x^4-8x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{15x^4-20x^3+21x^2}{10x^4+4x^3-24x^2}=$$

(uvrštenje $x=0$ daje $\frac{0}{0}$, deriviramo dalje) $=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{60x^3-60x^2+42x}{40x^3+12x^2-48x}=\ \text{opet}\ \frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{180x^2-120x+42}{120x^2+24x-48}=\frac{42}{-48}=\underline{-\frac{7}{8}}.$$

4.
$$y=\frac{a^{\ln x}-x}{\ln x}\quad\text{za}\ x=1.\quad y(1)=\frac{a^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}.$$

$$y(1)=\lim_{x\to 1}\frac{a^{\ln x}-x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{a^{\ln x}\cdot\ln a\cdot\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{\ln a-1}{1}=\underline{\ln a-1.}$$

5.
$$y=\frac{\operatorname{tg} x}{x}\ \text{za}\ x=0.\qquad y(0)=\frac{0}{0}.$$

$$y(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{1}=\underline{1.}$$

6.
$$y=\frac{1-\cos x}{x^3}\ \text{za}\ x=0.$$

$$y(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6x}=\frac{1}{0}=\underline{\infty.}$$

7.
$$y=\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}\quad\text{za}\ x=a.$$

$$y(a)=\frac{\ln 0}{\ln 0}=\frac{-\infty}{-\infty}.$$

$$y(a)=\lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{e^x-e^a}\cdot e^x}=\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{e^x(x-a)}=\ \text{uvrštenje}\ x=a\ \text{daje}$$

$$\frac{0}{0}=\lim_{x\to a}\frac{e^x}{e^x+(x-a)e^x}=\lim_{x\to a}\frac{e^x}{e^x(1+x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{1+(x-a)}=\frac{1}{1+0}=\underline{1.}$$

2. NEODREĐENI OBLICI $0 \cdot \infty$ I $\infty - \infty$

Prava vrijednost tih oblika određuje se tako, da se zadana funkcija najprije prikaže u obliku kvocijenta, tj. svodi se na oblik $\frac{0}{0}$, odnosno $\frac{\infty}{\infty}$, a zatim se primjenjuje L' Hospitalovo pravilo.

Primjeri.

1.
$$y = \ln(1 - \sin x) \cdot \operatorname{ctg} x \quad \text{za } x = 0.$$
$$y(0) = \ln 1 \cdot \operatorname{ctg} 0 = 0 \cdot \infty.$$
$$y = \ln(1 - \sin x) \cdot \operatorname{ctg} x,$$

pošto je $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, možemo pisati u obliku kvocijenta:

$$y = \frac{\ln(1 - \sin x)}{\operatorname{tg} x}$$

i primijeniti L' Hospitalovo pravilo, jer je sada $y(0) = \frac{0}{0}$.

$$y(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{\cos x}{1 - \sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = -\lim_{x \to 0} \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} = -\frac{1}{1} = \underline{-1.}$$

2.
$$\lim_{x \to \infty} \left[(x + a) \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right] = \infty \cdot 0 = \quad \text{za } x = \infty$$

pišemo funkciju u obliku kvocijenta

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x + a}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \cdot \frac{a}{x^2}}{\frac{-1}{(x+a)^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a(x+a)^2}{(x+a)x} = \lim_{x \to \infty} \frac{a(x+a)}{x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{a}{1} = \underline{a.}$$

3.
$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \quad \text{za } x = 0.$$
$$y(0) = \frac{1}{0} - \frac{1}{1 - 1} = \infty - \infty.$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \text{svodimo na zajednički nazivnik} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x + (e^x - 1) \cdot 1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x e^x + e^x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x e^x + e^x + e^x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x (x + 2)} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

4.
$$y = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{\ln(x - 1)} \quad \text{za } x = 2.$$
$$y(2) = \frac{1}{0} - \frac{1}{\ln 1} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty.$$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\ln(x-1)}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)-(x-2)}{(x-2)\cdot\ln(x-1)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x-1}-1}{(x-2)\cdot\frac{1}{x-1}+\ln(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1-x+1}{(x-2)+(x-1)\ln(x-1)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{1+(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}+\ln(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{1+1+\ln(x-1)}=\frac{-1}{2}=\underline{-\frac{1}{2}}$$

3. NEODREĐENI OBLICI 0^0, 1^∞ I ∞^0

Prava vrijednost tih oblika određuje se tako, da se zadana funkcija logaritmira po bazi e, zatim se desna strana, koja dobije oblik produkta, prikaže u obliku kvocijenta, pa se primijeni L' Hospitalovo pravilo. Na lijevoj strani imat ćemo izraz $\lim(\ln y)$, koji pišemo kasnije u obliku $\ln(\lim y)$, ako je y neprekinuta funkcija od x [vidi (87b)].

Primjeri.

1. $y=x^x$ za $x=0$

$y(0)=0^0$, što nije određena vrijednost.

Logaritmirajmo zadanu funkciju:

$\ln y=x\cdot\ln x$; a za $x=0$ $\ln y=0\cdot\ln 0=0\cdot(-\infty)$. Pišemo $x\ln x$ u obliku razlomka: $\ln y=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ pa za $x=0$ dobijemo konačno oblik $\ln y=\frac{\ln 0}{\frac{1}{0}}=-\frac{\infty}{\infty}$, koji dopušta primjenu L' Hospitalova pravila:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0.$$

$\lim_{x\to 0}\ln y=0$ ili $\ln(\lim_{x\to 0}y)=0$, jer je $\ln y=\ln x^x$ neprekinuta funkcija.

Odatle slijedi, da je

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}x^x=\underline{1}, \text{ jer je samo } \ln 1=0.$$

2. $y=x^{\frac{1}{x}}$, kad $x\to\infty$.

$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\infty^{\frac{1}{\infty}}=\infty^0$, što nije određena vrijednost.

Logaritmirajmo:

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln x=\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ ili } \ln(\lim_{x\to\infty}y)=0.$$

Kako je samo $\ln 1 = 0$ slijedi: $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = \underline{1.}$

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, kad $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty, \text{ što nije određena vrijednost.}$$

Logaritmirajmo:

$$\ln y = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

$$\lim_{x \to \infty} (\ln y) = \lim_{x \to \infty} \left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \infty \cdot 0 = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \to \infty} (\ln y) = 1 \quad \text{ili} \quad \ln (\lim_{x \to \infty} y) = 1.$$

Odatle po definiciji logaritma

$$\lim_{x \to \infty} y = e^1 = e \qquad (\ln e = 1)$$

Dakle:
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \underline{e.}$$

4. $y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a}$ kad $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a} = 1^\infty, \text{ što nije određena vrijednost.}$$

Logaritmirajmo:

$$\ln y = (x + a) \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x + a}}.$$

$$\lim_{x \to \infty} (\ln y) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x + a}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right)}{\frac{-1}{(x + a)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x}{x + a} \cdot \frac{a}{x^2} \cdot (x + a)^2\right] = a \lim_{x \to \infty} \frac{x + a}{x} = a \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1} = a.$$

$$\lim (\ln y) = a \quad \text{ili} \quad \ln (\lim y) = a.$$

Po definiciji logaritma: $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a} = \underline{e^a}$

5. Dokaži na sličan način, da je $\lim\limits_{x \to 0} (1 + mx)^{\frac{1}{x}} = e^m$.

6. $y = (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$, kad $x \to \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi} = \infty^0,$$ što nije određena vrijednost.

$$\ln y = (2x-\pi)\ln \operatorname{tg} x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\ln y) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [(2x-\pi)\ln \operatorname{tg} x] = 0\cdot\infty =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{2x-\pi}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{(2x-\pi)^2}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \frac{0}{0} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4(2x-\pi)}{2\cos 2x} = -\frac{0}{-2} = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\ln y) = 0 \quad \text{ili} \quad \ln(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y) = 0$$

Odatle po definiciji logaritma:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi} = \underline{1},$$ jer je $\ln 1 = 0$.

7. $y = \left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$, kad $x \to a$

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} \left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}} = 1^\infty,$$ što nije određena vrijednost.

$$\ln y = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)$$

$$\lim_{x\to a} (\ln y) = \lim_{x\to a} \left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)\right] = \infty\cdot 0 =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to a} \frac{-\frac{1}{2-\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a}}{-\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}} = \frac{2}{\pi}$$

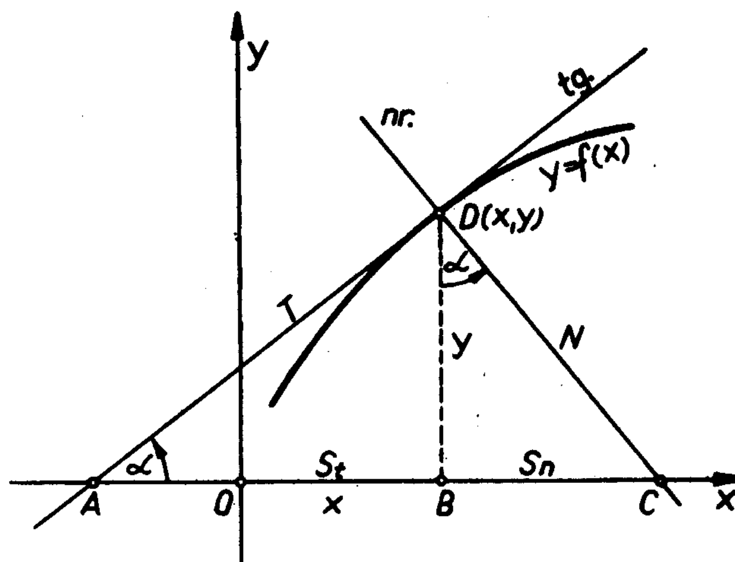
$$\lim_{x\to a} (\ln y) = \frac{2}{\pi} \quad \text{ili} \quad \ln(\lim_{x\to a} y) = \frac{2}{\pi}$$

Odatle po definiciji logaritma:

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} \left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}} = \underline{e^{\frac{2}{\pi}}}$$ jer je $\ln e^{\frac{2}{\pi}} = \frac{2}{\pi}\ln e = \frac{2}{\pi}$.

§ 16.

DULJINA TANGENTE I NORMALE, SUPTANGENTE I SUBNORMALE



Sl. 114.

Duljina tangente T je odrezak tangente DA od dirališta D do presjeka A s osi X.

$$AD = T$$

Duljina normale N je odrezak normale DC od dirališta D do presjeka C s osi X.

$$DC = N$$

Projekcije T i N na os X čine suptangentu S_T, odnosno subnormalu S_N.

$$S_T = AB$$
$$S_N = BC$$

Iz ΔABD slijedi:

$$S_T = y \cdot \text{ctg}\,\alpha = \frac{y}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{y}{y'}$$

$$T = \sqrt{y^2 + S_T{}^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}$$

Iz ΔDBC slijedi:

$$S_N = y \cdot \operatorname{tg}\alpha = y \cdot y'$$

$$N = \sqrt{y^2 + S_N{}^2} = \sqrt{y^2 + y^2 y'^2} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Prema tome

$$S_T = \left|\frac{y}{y'}\right| \qquad S_N = |y \cdot y'| \qquad (134a)$$

$$T = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1 + y'^2} \qquad N = |y|\sqrt{1 + y'^2}.$$

Obično se uzima apsolutna vrijednost tih odrezaka.

Primjer.

Izračunaj S_T, S_N, T i N za parabolu $y^2 = 2px$ u tački $T(x, y)$ parabole.

Računamo prema (134a):

$$y = \sqrt{2px} \quad ; \quad y' = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$$

$$S_T = \frac{y}{\frac{p}{y}} = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = \underline{|2x|}$$

$$S_N = y \cdot \frac{p}{y} = \underline{p}.$$

Vidimo da je suptangenta jednaka dvostrukoj apscisi dirališta, a subnormala je konstantna za sve tačke parabole i jednaka polovici parametra. Odatle slijedi poznata konstrukcija tangente, odnosno normale na parabolu $y^2 = 2px$.

$$T = \frac{y^2}{p}\sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \underline{\frac{|y|}{p}\sqrt{y^2 + p^2}}$$

$$N = y\sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \underline{\sqrt{y^2 + p^2}}$$

Izračunaj:

1. Iste veličine za $y^2 = 9x$ u tački T_1 $(x_1 = 4)$ parabole.

$$\left[8;\ \frac{9}{2};\ 10;\ \frac{15}{2}\right].$$

2. Duljinu N normale za lančanicu $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$ u nekoj tački (x_1, y_1) lančanice.

$$\left[\frac{y_1^2}{a}\right]$$

§ 17.

EKSTREMNE VRIJEDNOSTI I TAČKE INFLEKSIJE FUNKCIJE $y = y(x)$

1. ZNAČENJE PREDZNAKA PRVE DERIVACIJE FUNKCIJE

a) Funkcija raste:

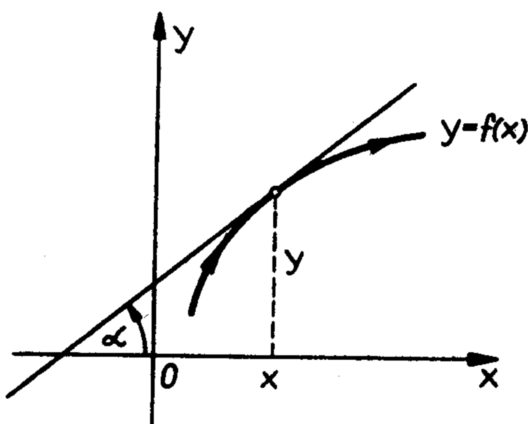
Iz slike 115 vidimo, da kad funkcija raste, njezina je derivacija pozitivna: $y'(x) = \operatorname{tg}\alpha > 0$, jer je $\alpha < 90^0$, a $\operatorname{tg}\alpha$ je pozitivan u I kvadrantu.

Dakle:

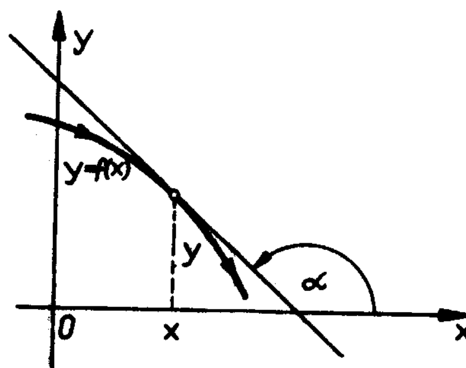
Ako funkcija raste, njena je prva derivacija pozitivna.

Vrijedi i obrat:

Ako je prva derivacija funkcije u nekoj tački pozitivna, funkcija prolazi tom tačkom rastući.



Sl. 115.



Sl. 116.

b) Funkcija pada:

Iz slike 116 vidimo, da kad funkcija pada, $y'(x) = \operatorname{tg}\alpha < 0$, jer je $\alpha > 90^0$, a $\operatorname{tg}\alpha$ je negativan u II kvadrantu. (Vidi Repet. element. matematike).

Dakle:

Ako funkcija pada, njena je prva derivacija negativna.

Vrijedi i obrat:

Ako je prva derivacija funkcije u nekoj tački negativna, funkcija prolazi tom tačkom padajući.

Iz navedenog slijedi praktičko značenje prve derivacije funkcije u nekoj tački: predznak derivacije pokazuje da li funkcija u

dotičnoj tački raste ili opada, a vrijednost derivacije daje intenzitet ili brzinu toga rasta ili pada.

Tako npr., ako prva derivacija neke funkcije u nekoj tački ima vrijednost $+4$, možemo zaključiti da dotična funkcija u toj tački raste i to strmo raste, jer iz $y' = \operatorname{tg} \alpha = 4$ slijedi da tangenta na graf funkcije u toj tački zatvara s osi $+X$ kut $\alpha \doteq 76^0$.

Funkcija, kojoj je prva derivacija u nekoj tački $-0{,}07$, opada u toj tački, pri čemu je pad vrlo blag, jer iz $y' = \operatorname{tg} \alpha = -0{,}07$ slijedi da je $\alpha \doteq 180^0 - 4^0 = 176^0$.

Primjer.

Kako prolazi funkcija $\sin x$ tačkama $x_1 = \frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{3\pi}{4}$?

$$y = \sin x$$
$$y' = \cos x$$
$$y'(x_1) = \cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^0 = + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

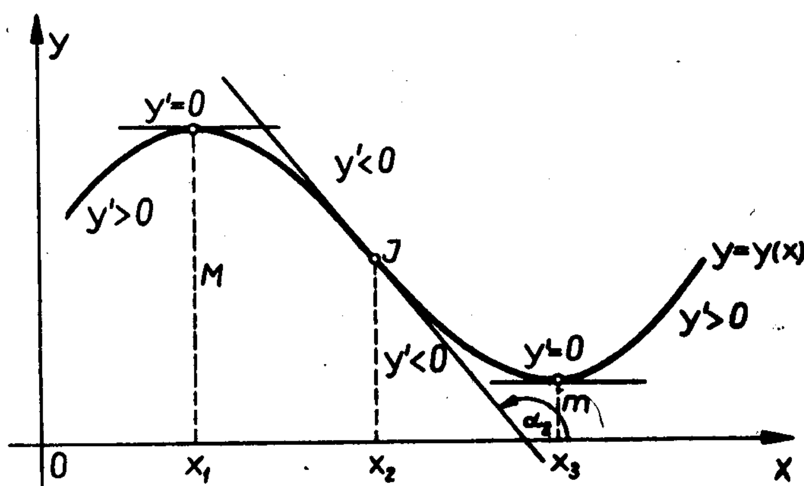
Funkcija $\sin x$ prolazi tačkom $x_1 = \frac{\pi}{4}$ rastući.

$$y'(x_2) = \cos \frac{3\pi}{4} = \cos 135^0 = -\sin 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0.$$

Funkcija $\sin x$ prolazi tačkom $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ padajući. (Vidi sl. 46).

2. NUŽDAN UVJET ZA EKSTREM FUNKCIJE $y = y(x)$

Iz navedenog slijedi, da je prva derivacija funkcije $y = y(x)$ u tačkama maksimuma i minimuma, tj. u tačkama ekstrema jednaka nuli, jer u tim tačkama funkcija ne raste i ne pada, a geometrijski to znači da su tangente u tačkama ekstrema funkcije usporedne s osi X, jer je u tačkama ekstrema $y' = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 0 = 0$. (Vidi sl. 117 i Rolleov teorem § 12).



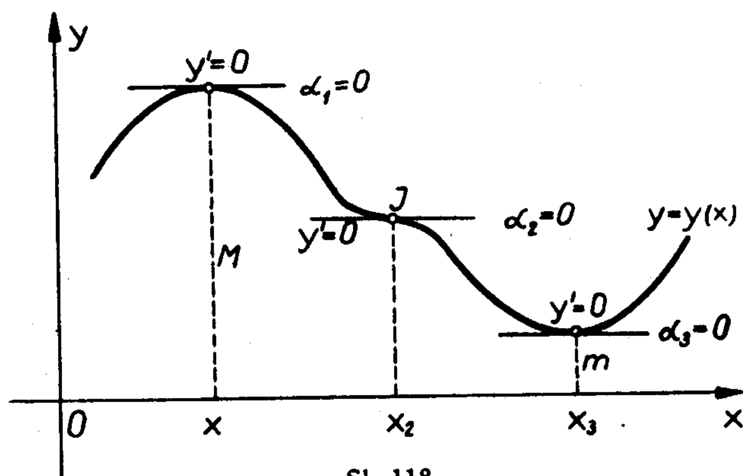
Sl. 117.

Iz pojma maksimuma i minimuma, a i iz slike 117 slijedi, da ona funkcija ima maksimum, koja nakon rasta počne padati, odnosno ima minimum, ako nakon pada počne rasti. Prema tome funkcija, koja uvijek raste ili uvijek pada, ne može imati ni maksimuma ni minimuma. Kao primjer navedimo funkciju $y = x^3$ (vidi sl. 31), koja uvijek raste, dakle nema ekstremnih vrijednosti, kao i funkcija $y = \operatorname{ctg} x$, koja uvijek opada (sl. 49).

Pokazali smo, ako funkcija y ima u nekoj tački x ekstrem, da je tada prva derivacija funkcije u toj tački jednaka nuli tj. $y'(x) = 0$.

O b r a t n e v r i j'e d i. To znači: ako funkcija ima ekstrem u nekoj tački, tada je prva derivacija funkcije u toj tački sigurno jednaka nuli, ali ako je prva derivacija funkcije u nekoj tački jednaka nuli, funkcija u toj tački m o ž e a l i n e m o r a imati ekstrem, jer bi u toj tački mogla biti tačka infleksije s h o r i z o n t a l n o m tangentom.

Sl. 118 prikazuje funkciju, kojoj je prva derivacija jednaka nuli u tačkama apscisa x_1, x_2 i x_3, jer su u tim tačkama tangente usporedne s osi X, ali ekstremne vrijednosti ima ta funkcija samo za x_1 i x_3, dok za x_2 funkcija nema ekstrema, već ima tačku infleksije s horizontalnom tangentom [vidi § 4, 1, b), 4)].



Sl. 118.

Primijetimo, da obično tangenta u tački infleksije nije usporedna s osi X, pa je općenito $y' \neq 0$ u tački infleksije. Vidi npr. funkciju prikazanu na slici 117. Ta funkcija ima za $x = x_2$ tačku infleksije, jer u toj tački krivulja prelazi iz konveksnog dijela u konkavni, a tangenta dira i siječe krivulju, ali u toj tački $y' = \operatorname{tg} \alpha_2 \neq 0$. U našem slučaju je dakle govor o osobitoj tački infleksije, tj. tački infleksije u kojoj je t a n g e n t a u s p o r e d n a s o s i X, pa je u toj tački $y' = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Kaže se da je $y' = 0$ samo n u ž d a n u v j e t z a e k s t r e m, jer je u tačkama ekstrema derivacija funkcije jednaka nuli, ali t a j u v j e t n i j e

dovoljan, jer je $y' = 0$ ne samo u tačkama ekstrema, već i u onim tačkama infleksije u kojim su tangente usporedne s osi X.

Prema tome, ako izračunamo derivaciju y' neke funkcije y, tu derivaciju izjednačimo s nulom pa riješimo tako dobivenu jednadžbu $y' = 0$, korijeni te jednadžbe bit će one vrijednosti x, samo za koje je tangenta na graf funkcije usporedna s osi X, a u tim tačkama kako znamo ima funkcija ili ekstremne vrijednosti, ili tačke infleksije s horizontalnim tangentama. Kaže se da rješenja jednadžbe $y' = 0$ daju samo tzv. stacionarne tačke funkcije tj. tačke u kojim je $y' = 0$.

Tako npr., ako izračunamo derivaciju funkcije $y = y(x)$, prikazanu na sl. 118, pa riješimo jednadžbu $y'(x) = 0$ dobit ćemo tri korijena te jednadžbe i to x_1, x_2 i x_3, kako se to vidi na slici 118. U svim tim tačkama tangente na krivulje usporedne su s osi X, ali ekstremne vrijednosti ima funkcija samo za x_1 i x_3, dok za x_2 ima tačku infleksije s horizontalnom tangentom.

Ukratko rečeno: Korijeni jednadžbe $y' = 0$ daju one vrijednosti x za koje je tangenta na krivulju usporedna s osi X.

Pokažimo to na primjeru kubne funkcije $y = x^3$, prikazane na sl. 31.

Računamo derivaciju funkcije:

$$y' = 3x^2.$$

Stavimo $y' = 0$ i rješavamo jednadžbu $3x^2 = 0$.

Dobijemo:

$$x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 0$$

ili

$$\underline{x_0 = 0}.$$

Iz grafa funkcije (vidi sl. 31) vidimo, da funkcija $y = x^3$ uopće nema ekstrema, jer uvijek raste, nema dakle ekstrema ni za $x_0 = 0$. U toj tački (ishodištu) ima funkcija tačku infleksije s horizontalnom tangentom, a stoga je u toj tački $y' = 0$ (tangenta je os $X, y = 0$). Nastaje pitanje, kako ćemo analitičkim putem odrediti za koje vrijednosti korijena jednadžbe $y'(x) = 0$ ima funkcija $y(x)$ ekstrem i to kakav ekstrem, da li maksimum ili minimum, i za koje vrijednosti korijena ima funkcija tačku infleksije s horizontalnom tangentom. Da na to pitanje odgovorimo, pređimo na:

3. KONVEKSNOST I KONKAVNOST KRIVULJE. DOVOLJAN UVJET ZA EKSTREM. NUŽDAN UVJET ZA TAČKE INFLEKSIJE

U matematici se sudi o konveksnosti, odnosno konkavnosti luka krivulje, tako, da se krivulja promatra odozgo prema dolje, tj. u smislu osi $-Y$. Vidi strelice na slici 119.

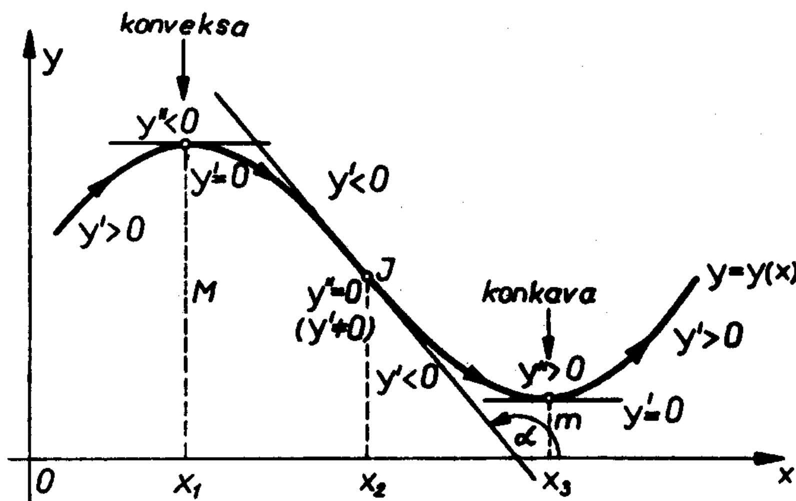
I. *Konveksni dio krivulje* (vidi sl. 119).

Do maksimuma $y' > 0$, jer funkcija raste.
U maksimumu $y' = 0$, jer funkcija ne raste i ne pada.
Iza maksimuma $y' < 0$, jer funkcija pada.

Iz toga slijedi, da *derivacija* y' funkcije y *opada* u svim tačkama u kojim je krivulja konveksna, jer y' prelazi od pozitivnih vrijednosti preko nule na negativne. Znamo već da je derivacija funkcije negativna, kad funkcija opada, a budući da je y'' derivacija za y', zaključujemo:

U svim tačkama, u kojima je krivulja konveksna, druga derivacija funkcije y'' je negativna.

Vrijedi i obrat: *Ako je druga derivacija funkcije negativna, krivulja je konveksna, dakle funkcija u tački u kojoj je njena prva derivacija y' jednaka nuli, mora imati maksimum* (vidi sl. 119).



Sl. 119.

II. *Konkavni dio krivulje*

Do minimuma $y' < 0$, jer funkcija pada.
U minimumu $y' = 0$, jer funkcija ne pada i ne raste.
Iza minimuma $y' > 0$, jer funkcija raste.

Vidimo, da u konkavnom dijelu krivulje prva derivacija funkcije y' raste, jer prelazi od negativnih vrijednosti preko nule na pozitivne, pa je njena derivacija, tj. y'', pozitivna. Dakle:

U svim tačkama u kojima je krivulja konkavna druga derivacija funkcije y'' je pozitivna.

Vrijedi i obrat: *Ako je druga derivacija funkcije pozitivna, krivulja je konkavna, pa funkcija u tački u kojoj je njena*

prva derivacija y' jednaka nuli, mora imati minimum (vidi sl. 119).

Dakle, predznak druge derivacije daje kriterij, ima li funkcija u tački u kojoj je $y' = 0$ maksimum ili minimum.

Vratimo se još do naše krivulje prikazane na slici 119. Idući po toj krivulji opažamo, da druga derivacija funkcije y'', koja je negativna u konveksnom dijelu krivulje, postaje pozitivna čim pređemo na konkavni dio. Postoji dakle jedna tačka u kojoj je $y'' = 0$, a to je tačka infleksije I, jer znamo da je tačka infleksije ona tačka u kojoj krivulja prelazi iz konveksnog dijela u konkavni ili obratno. U toj tački krivulja niti je konveksna, a niti konkavna, stoga u tački infleksije druga derivacija funkcije jednaka je nuli.

Obrat ne vrijedi, a to znači: ako je druga derivacija funkcije u nekoj tački jednaka nuli, funkcija u toj tački *može ali ne mora* imati tačku infleksije, jer bi mogla biti tačka ekstrema (naravno uz uvjet da je u toj tački i prva derivacija funkcije $y' = 0$, tj. uz uvjet, da je tangenta u toj tački horizontalna). Drugim riječima: $y'' = 0$ je samo nuždan uvjet za tačku infleksije.

Pokažimo to na primjeru funkcije $y = x^4$ prikazane na sl. 32.

Računamo prvu derivaciju funkcije: $y' = 4x^3$ i njenu drugu derivaciju: $y'' = 12x^2$. Stavimo $y'' = 0$ i riješimo jednadžbu $12x^2 = 0$. Dobijemo $x_0 = 0$. Vidimo, da je druga derivacija funkcije u tački $x_0 = 0$, tj. u ishodištu, jednaka nuli, ali iz slike vidimo da je naša funkcija uvijek konkavna, pa nema nigdje tačke infleksije, a za $x_0 = 0$ ima ekstrem i to minimum.

Naše proučavanje značenja predznaka druge derivacije dovelo nas je do važnih zaključaka:

1) Hoćemo li da odredimo, da li je graf zadane funkcije $y = y(x)$ u zadanoj tački $x = x_0$ konveksan ili konkavan, dovoljno je izračunati *predznak* druge derivacije funkcije u toj tački $x = x_0$, pa ako je

$y''(x_0) < 0$, krivulja je konveksna, a ako je
$y''(x_0) > 0$, krivulja je konkavna u toj tački $x = x_0$.

Primjer: Je li sinusoida konveksna ili konkavna u tačkama $x_1 = \frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{5\pi}{4}$?

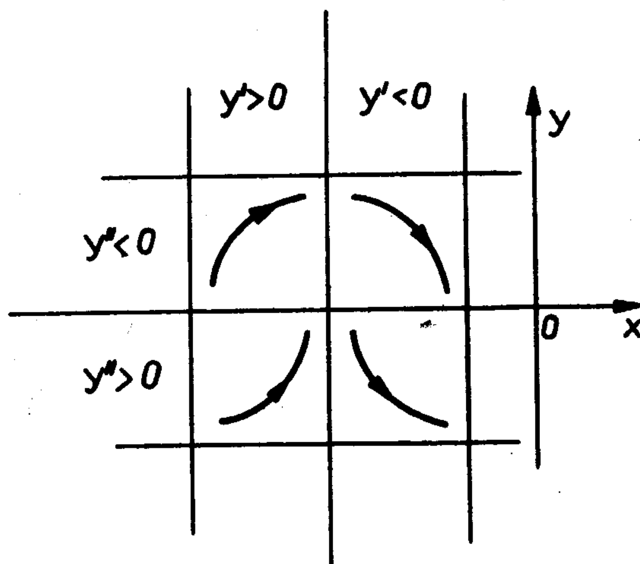
$$y = \sin x$$
$$y' = \cos x$$
$$y'' = -\sin x$$

$$y''(x_1) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\sin 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$y''(x_1) < 0$, dakle u tački $x_1 = \frac{\pi}{2}$ sinusoida je konveksna.

$$y''(x_2) = -\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin 225^0 = -(-\sin 45^0) = \sin 45^0 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$y''(x_2) > 0$, dakle u tački $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ sinusoida je konkavna.



Sl. 120.

(Vidi sliku 46).

Sjetimo li se još, da funkcija raste, ako je njena prva derivacija pozitivna, odnosno pada, ako je ta derivacija negativna, tada možemo prikazati četiri mogućnosti, koje su predočene na sl. 120.

2) Postavili smo dovoljni uvjet za ekstrem:

Ako je druga derivacija funkcije u tački u kojoj je njena prva derivacija jednaka nuli negativna, funkcija ima u toj tački maksimum, a ako je pozitivna — funkcija ima minimum.

Budući da analitički izraz funkcije daje za svaku vrijednost argumenta x, koja leži u intervalu definicije funkcije, pripadnu vrijednost funkcije y, vrijednost maksimuma odnosno minimuma odredimo tako, da vrijednost x za koju je $y' = 0$, uvrstimo u zadanu funkciju, čije smo ekstremne vrijednosti tražili.

3) Postavili smo nuždan uvjet za tačku infleksije: u tački infleksije druga derivacija funkcije $y'' = 0$.

Navedimo više primjera za određivanje ekstremnih vrijednosti funkcija.

1) Odredi ekstremne vrijednosti polinoma:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

a) Računamo y': $\quad y' = \frac{1}{3}3x^2 - 2x - 3$.

ili $\quad y' = x^2 - 2x - 3$.

b) Stavimo $y' = 0$ i riješimo tako dobivenu jednadžbu:

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = 1 \pm 2.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{array}\right\}$$ Samo za te vrijednosti x funkcija može imati ekstrem.

c) Računamo y'' i uvrštavamo vrijednosti dobivene za x_1 i x_2:

$$y'' = 2x - 2$$

$$y''(x_1) = y''(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 > 0.$$

Druga derivacija funkcije u tački $x_1 = 3$ je pozitivna (**konkava!**), dakle za $x_1 = 3$ ima funkcija minimum.

$$y''(x_2) = y''(-1) = 2 \cdot (-1) - 2 = -4 < 0.$$

y'' je u tački $x_2 = -1$ negativna (konveksa!), dakle za $x_2 = -1$ ima funkcija maksimum.

d) Uvrštavamo vrijednosti dobivene za x_1 i x_2 u z a d a n u funkciju, da odredimo ekstremne vrijednosti funkcije:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5,$$

$$y_{min} = y(x_1) = y(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 - 9 + 5 = -4,$$

$$\underline{y_{min} = -4.}$$

$$y_{maks} = y(x_2) = y(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 5 = 6\frac{2}{3} = 6{,}67$$

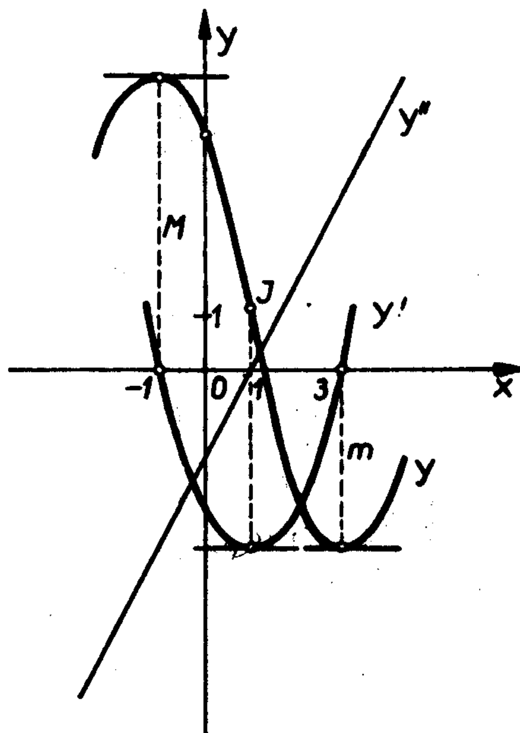
$$\underline{y_{maks} = 6{,}67.}$$

Znajući ekstremne vrijednosti funkcije i uzevši u obzir da je $y = 5$ za $x = 0$ (uvrsti u zadanu funkciju $x = 0$!), možemo lako narisati približnu sliku funkcije

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5.$$

U slici 121 prikazana je zadana funkcija $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$, njena prva derivacija $y' = x^2 - 2x - 3$ (parabola) i njena druga derivacija $y = 2x - 2$ (pravac). Sve što smo rekli o značenju predznaka I i II derivacije i o njihovim nultačkama zrcali se u toj slici.

Tako se iz slike vidi, da je prva derivacija funkcije y' od



Sl. 121.

$-\infty$ do -1 pozitivna, od -1 do $+3$ negativna, a od $+3$ do $+\infty$ opet pozitivna. Tome odgovara rast funkcije y u prvom intervalu, pad u drugom i ponovni rast u trećem intervalu. Vidimo dalje, da je druga derivacija funkcije $y'' = 0$ za $x = 1$, i da je y'' od $-\infty$ do $+1$ **negativna**, a od $+1$ do $+\infty$ pozitivna. Tome odgovara tačka infleksije I funkcije y za $x = 1$ i konveksni dio krivulje u prvom intervalu, odnosno konkavni dio u drugom intervalu. Vidimo također, da minimumu od y', tj. vrhu parabole odgovara nultačka druge derivacije y'', jer je II derivacija y'' prva derivacija od I derivacije y'.

2. $$y = x^3 - 3x^2 + 6x + 10,$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 6,$$
stavimo $$y' = 0; \quad 3x^2 - 6x + 6 = 0 \mid : 3,$$
$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i.$$

Zadana funkcija n e m a e k s t r e m a, jer se prva derivacija funkcije nigdje ne poništava u realnosti (korijeni x_1 i x_2 su konjugirano kompleksni). Drugim riječima tangenta na krivulju nigdje nije horizontalna.

3. Neka smo neku veličinu, npr. neku dužinu, izmjerili n puta s istom tačnosti i neka smo dobili n jednako pouzdanih rezultata mjerenja:

$$l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_n.$$

Nastaje pitanje: koju ćemo vrijednost uzeti za izmjerenu veličinu, koja vrijednost najviše odgovara stvarnoj vrijednosti izmjerene veličine? Postupat ćemo u smislu Gaussove teorije najmanjih kvadrata koja kaže, da je najbolja vrijednost ona, za koju je z b r o j k v a d r a t a o d s t u p a n j a p o d a t a k a m j e r e n j a m i n i m u m.

Označimo li sa l tu traženu najbolju vrijednost izmjerene veličine, glasit će odstupanja:

$$l - l_1$$
$$l - l_2$$
$$l - l_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$l - l_n$$

a zbroj S njihovih kvadrata bit će:

$$S = (l - l_1)^2 + (l - l_2)^2 + (l - l_3)^2 + \ldots\ldots + (l - l_n)^2.$$

Imamo sada odrediti onu vrijednost veličine l, za koju je zbroj kvadrata S minimum. Postupamo kao obično pri određivanju ekstremnih vrijednosti funkcije:

Deriviramo S po l:

$$S' = 2(l - l_1) + 2(l - l_2) + 2(l - l_3) + \ldots\ldots + 2(l - l_n).$$

Stavimo $S' = 0$:

$$2(l - l_1) + 2(l - l_2) + 2(l - l_3) + \ldots\ldots\ldots + 2(l - l_n) = 0$$

ili, ako uzmemo u obzir da lijeva strana jednadžbe sadrži n članova (n odstupanja), dobijemo:

$$2[l \cdot n - (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots\ldots\ldots + l_n)] = 0.$$

Odatle:

$$l = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}{n} = \text{aritmetička sredina iz podataka mjerenja.}$$

Računamo S'', tj. S' deriviramo po l:

$$S'' = 2 + 2 + 2 + \ldots\ldots\ldots + 2 = 2 \cdot n > 0.$$

S ima minimum za dobiveni l.

Prema tome u smislu teorije najmanjih kvadrata najbolja vrijednost izmjerene veličine je aritmetička sredina iz rezultata mjerenja, ako su ta mjerenja izvršena s istom tačnosti.

2) Odredi ekstremne vrijednosti razlomljenih racionalnih funkcija:

1. $$y = \frac{x}{x^2 + 2x + 4}$$

$$y' = \frac{(x^2 + 2x + 4) \cdot 1 - x \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 4)^2},$$

odatle

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 4 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 2x + 4)^2}$$

ili

$$y' = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 2x + 4)^2}.$$

Stavimo $y' = 0$: $$\frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 2x + 4)^2} = 0.$$

Razlomak je jednak nuli, kad je brojnik jednak nuli ili kad je nazivnik jednak ∞. Budući da je nazivnik izraza za y' polinom, koji je uvijek konačan za bilo koju konačnu vrijednost x, zaključujemo da brojnik mora biti nula, tj.

$$-x^2 + 4 = 0,$$
$$x^2 = 4,$$
$$x_{1,2} = \pm 2.$$

Samo za $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$ može funkcija imati ekstreme.

Sada treba računati y'', a to bi nas dovelo do veoma složenog izraza. Pokažimo općenito, kako se može pojednostaviti računanje y'' za razlomljene funkcije u slučaju traženja ekstrema.

Pretpostavimo da tražimo ekstremne vrijednosti funkcije $y = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Deriviramo: $$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Stavimo $y' = 0$, pa dobijemo uz pretpostavku da je $v^2 \neq \infty$:

$$vu' - uv' = 0. \qquad (a)$$

Računamo y'': $$y'' = \frac{v^2(vu' - uv')' - (vu' - uv')(v^2)'}{v^4}.$$

Uvrštenje jednakosti (a) daje:

$$y'' = \frac{(vu' - uv')'}{v^2} = \frac{\text{derivacija brojnika od } y'}{\text{nazivnik od } y'}$$

(vrijedi samo za $y' = 0$!).

Budući da je v^2 za sve x pozitivan bit će

$y'' < 0$, kad je $(vu' - uv')' < 0$, odnosno

$y'' > 0$, kad je $(vu' - uv')' > 0$, a odatle slijedi:

Ako je derivacija brojnika prve derivacije funkcije u nultačkama te prve derivacije negativna, funkcija ima maksimum, ako je pozitivna — ima minimum.

Nastavimo naš primjer:

Imali smo $$y' = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 2x + 4)^2}.$$

Označimo brojnik sa $\varphi(x)$:

$\varphi(x) = -x^2 + 4$ i računamo

$\varphi'(x) = -2x.$

Ovamo uvrstimo vrijednosti dobivene za nultačke prve derivacije funkcije, tj. $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$:

$\varphi'(2) = -4 < 0$: za $x_1 = 2$ ima funkcija maksimum,

$\varphi'(-2) = 4 > 0$: za $x_2 = -2$ ima funkcija minimum.

Uvrštenje $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$ u zadanu funkciju daje tražene ekstremne vrijednosti funkcije:

$$y_{maks} = y(2) = \frac{2}{4 + 4 + 4} = \underline{\frac{1}{6}}.$$

$$y_{min} = y(-2) = \frac{-2}{4 - 4 + 4} = \underline{-\frac{1}{2}}.$$

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1},$$

$$y' = \frac{(x^2 - x + 1)(2x + 1) - (x^2 + x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

Nakon uređenja dobijemo:

$$y' = \frac{-2x^2 + 4x}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

Stavimo $\quad y' = 0: -2x^2 + 4x = 0;$

$$-2x(x - 2) = 0.$$

Slijedi: $-2x = 0$ i $x - 2 = 0$, a odatle

$x_1 = 0,$
$x_2 = 2.$ | Samo za te x može funkcija imati ekstreme.

Brojnik od y': $\quad \varphi(x) = -2x^2 + 4x,$

$$\varphi'(x) = -4x + 4.$$

$\varphi'(x_1) = \varphi'(0) = 4 > 0$ — funkcija ima minimum za $x_1 = 0$,
$\varphi'(x_2) = \varphi'(2) = -4 < 0$ — „ „ maksimum za $x_2 = 2$.

$$y_{min} = y(0) = \frac{-1}{+1} = \underline{-1}.$$

$$y_{maks} = y(2) = \frac{4 + 2 - 1}{4 - 2 + 1} = \underline{\frac{5}{3}}.$$

3. Odredi ekstremne vrijednosti funkcije

$$y = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}.$$

Rješenje: $\quad y_{maks} = y(1) = 2,$

$$y_{min} = y(-1) = -2.$$

4. Isto za $\quad y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}.$

Rješenje: $\quad y_{maks} = y(0) = 4,$

$$y_{min} = y(-2) = \frac{8}{3}.$$

3) Sada uzmimo nekoliko primjera za određivanje ekstremnih vrijednosti transcendentnih funkcija.

1. $\quad y = e^{\sin x},$

$$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x; \quad y' = 0:$$

$$e^{\sin x} \cdot \cos x = 0.$$

Umnožak od dva ili više množitelja jednak je nuli, kad je svaki množitelj za sebe jednak nuli, naravno uz uvjet da može biti nula.

(Ako je npr. $x \cdot y \cdot z = 0$ tada je $x = 0$, jer je $0 \cdot y \cdot z = 0$ i
$y = 0$, jer je $x \cdot 0 \cdot z = 0$ i konačno
$z = 0$, jer je $x \cdot y \cdot 0 = 0$).

U našem slučaju je prvi množitelj

$$e^{\sin x} \neq 0,$$

jer je funkcija e^x (vidi sl. 57), a dakle i $e^{\sin x}$ uvijek pozitivna, pa ne može imati nultačaka.

Prema tome je samo: $\cos x = 0.$

Odatle slijedi: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, jer je $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^0 = 0,$

$x_2 = \frac{3\pi}{2}$, jer je $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^0 = 0.$

Samo za te vrijednosti x-a može zadana funkcija imati ekstrem.

$y'' = -e^{\sin x} \cdot \sin x + \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x$ ili

$y'' = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x).$

$$y''(x_1) = e^{\sin\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = e^1(0-1) = -e < 0.$$

Za $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ima zadana funkcija maksimum.

$$y''(x_2) = e^{\sin\frac{3\pi}{2}}\left(\cos^2\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-1}(0+1) = \frac{1}{e} > 0.$$

Za $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ ima funkcija minimum.

$$y_{maks} = y(x_1) = e^{\sin\frac{\pi}{2}} = e = 2{,}72 \ (M).$$

$$y_{min} = y(x_2) = e^{\sin\frac{3\pi}{2}} = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0{,}37 \ (m).$$

Sl. 122 prikazuje našu funkciju $y = e^{\sin x}$.

Funkcija $y = e^{\sin x}$ je periodska najmanjeg perioda 2π, jer eksponent $\sin x$ ima taj period.

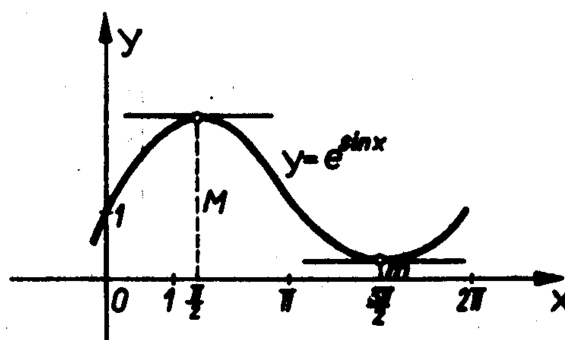
2. $y = e^{-\cos^2 x}$

$y' = + e^{-\cos^2 x} \cdot 2\cos x \cdot \sin x$

ili jednostavnije

$y' = e^{-\cos^2 x} \cdot \sin 2x$ (a)

(prema trigonometrijskoj formuli $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$).



Sl. 122.

$y' = 0$: $e^{-\cos^2 x} \cdot \sin 2x = 0$, odatle

$e^{-\cos^2 x} \neq 0$; $\sin 2x = 0$.

Slijedi: $2x = 0$, jer je $\sin 0 = 0$,

$2x = \pi$, jer je $\sin \pi = 0$.

Imamo dakle:

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$. | Samo za ove vrijednosti x-a može funkcija imati ekstreme.

$$y'' = e^{-\cos^2 x} \cdot \cos 2x \cdot 2 + \sin 2x \cdot e^{-\cos^2 x} \cdot \sin 2x \qquad \text{[vidi (a)]}$$

$$y'' = e^{-\cos^2 x} (2 \cos 2x + \sin^2 2x).$$

$$y''(x_1) = y''(0) = e^{-1} (2 \cdot 1 + 0) = \frac{2}{e} > 0,$$

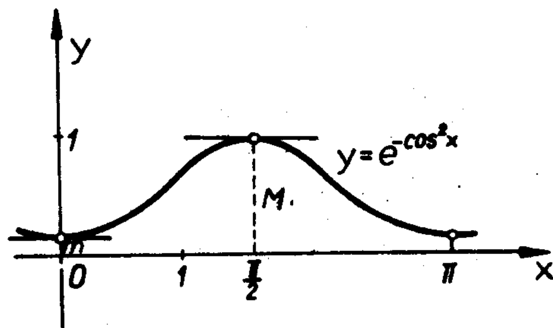
minimum za $x_1 = 0$.

$$y''(x_2) = y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^0 [2 \cdot (-1) + 0] = 1 \cdot (-2) = -2 < 0,$$

maksimum za $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

$$y_{\min} = y(x_1) = y(0) = e^{-1} = \frac{1}{e} \doteq \underline{0{,}37.}$$

$$y_{\text{maks}} = y(x_2) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^0 = \underline{1.}$$



Sl. 123.

Slika 123 prikazuje tu funkciju $y = e^{-\cos^2 x}$.

Funkcija $y = e^{-\cos^2 x}$ je periodska najmanjeg perioda π, jer njen eksponent $-\cos^2 x$ ima taj period.

4. NAPOMENE ZA ODREĐIVANJE EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI FUNKCIJE $y = y(x)$

1. Nemoj nikad zaboraviti da pojednostaviš izraz dobiven za y'. Time ćeš znatno pojednostaviti čitav daljnji račun.

2. Iz teorije ekstrema, a i iz gornjih primjera jasno se vidi, da je za ekstrem od važnosti samo predznak druge derivacije funkcije, a nikako njena vrijednost. Za ekstreme su prema tome najvažnije nultačke prve

derivacije x_1, x_2, ... i vrijednost ekstrema, sve ostalo je samo analiza o tome ima li funkcija ekstreme za x_1, x_2, ... a ako ima jesu li to maksimumi ili minimumi.

Ako npr. unaprijed znamo, da naša funkcija ima maksimum ili minimum, a to je čest slučaj u tehničkim računima, tada uopće ne računamo druge derivacije funkcije, već se ograničavamo rješenjem jednadžbe $y' = 0$, da odredimo mjesto ekstrema, i uvrštenjem dobivene vrijednosti x u zadanu funkciju, da odredimo maksimum, odnosno minimum funkcije.

Neka se, npr., traži ekstremna vrijednost kvadratne funkcije $y = 3x^2 - 2x - 1$. Znamo, da je graf kvadratne funkcije parabola, kojoj je os simetrije okomita na os X, i da je zadana parabola otvorena prema gore, jer je koeficijent od x^2 (3) pozitivan. Dakle zadana funkcija ima minimum, ali gdje i koliki je?

Računamo: $y' = 6x - 2,$

$$y' = 0; \quad 6x - 2 = 0,$$

$$x_1 = \frac{1}{3}.$$

$$y_{min} = y\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{3} - 1 = -\frac{4}{3}.$$

(Vidi sl. 30 a).

3. Znamo da ekstremne vrijednosti funkcije $y = f(x)$ određujemo tako, da tražimo tačke u kojim su tangente na graf funkcije paralelne s osi X, tj. određujemo s t a c i o n a r n e tačke funkcije, u kojim je $y' = 0$, pa na temelju predznaka druge derivacije zaključujemo, da li je u dotičnim tačkama maksimum ili minimum zadane funkcije.

Nije rijedak slučaj da postupajući na taj način dobijemo za zadanu funkciju nekoliko maksimuma i nekoliko minimuma, od kojih su neki veći a drugi manji, drugim riječima dobijemo r e l a t i v n e maksimume i minimume. Može se čak dogoditi da za maksimum funkcije dobijemo m a n j u vrijednost nego za minimum. To je čest slučaj kod razlomljenih racionalnih funkcija.

Navodimo primjer.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$y' = \frac{x \cdot 2x - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$y' = 0; \; x^2 - 1 = 0, \; x_{1,2} = \pm 1$$

$$y'' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$y''(1) = 2 > 0$: za $x_1 = 1$ ima y minimum

$y''(-1) = -2 < 0$: za $x_2 = -1$ ima y maksimum

$y_{min} = 2$; $\qquad y_{maks} = -2$.

Vidimo da je $y_{maks} < y_{min}$.

Nariši graf zadane funkcije $y = \frac{x^2+1}{x}$, odredivši i asimptote $x = 0$ i $y = x$.

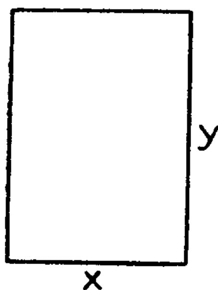
4. Pokažimo još na konkretnim primjerima, kako se rješavaju problemi za određivanje ekstrema.

1) Između svih pravokutnika zadana opsega $2s$ odredi onaj, koga je površina što veća.

a) Pišimo izraz za veličinu, čija se ekstremna vrijednost traži, označivši s x i y elemente te veličine.

Površina pravokutnika (vidi sl. 124):

$$P = x \cdot y.$$



Sl. 124.

b) Da možemo dobiveni izraz derivirati, izrazimo y s x (ili x s y) pomoću uvjeta koji je sadržan u zadatku, pa tu vrijednost uvrstimo u izraz napisan za veličinu čiji se ekstrem traži:

Opseg pravokutnika: $2x + 2y = 2s \mid :2$

$x + y = s,$

odatle $y = s - x.$ (a)

Uvrštenje u P daje: $P = x(s - x),$

ili $P = sx - x^2.$

c) Dalje postupamo kao obično pri određivanju ekstrema:

$$P' = s - 2x,$$

$$P' = 0: \; s - 2x = 0,$$

$$x_1 = \frac{s}{2}.$$

$P'' = -2,$

$P''(x_1) = -2 < 0$. Površina P je maksimalna za $x_1 = \frac{s}{2}$.

Prema (a): $$y_1 = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}.$$

$$x_1 = y_1 = \frac{s}{2}.$$

Najveću površinu ima kvadrat i ta površina iznosi:

$$P_{maks} = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} = \frac{s^2}{4}.$$

2) Na kraju navedimo još jedan primjer iz čvrstoće.

Ne ulazeći u tumačenje pojmova čvrstoće, riješimo čisto matematički slijedeći problem:

Za koju vrijednost kuta α prima moment tromosti I_u ravna lika obzirom na neku os U maksimalnu, odnosno minimalnu vrijednost, ako je

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha,$$

gdje su I_x, I_y i I_{xy} momenti tromosti toga lika s obzirom na koordinatni sustav XY, a α je kut što ga os U zatvara s osi X.

Deriviramo I_u po α:

$$I_u' = -I_x \cdot 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha + I_y \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - I_{xy} \cdot 2\cos 2\alpha,$$

ili

$$I_u' = -I_x \sin 2\alpha + I_y \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha,$$

ili

$$I_u' = (I_y - I_x) \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha. \qquad \text{(a)}$$

Stavimo $I_u' = 0$:

$$(I_y - I_x) \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha = 0 \mid : \cos 2\alpha.$$

$$(I_y - I_x) \operatorname{tg} 2\alpha - 2 I_{xy} = 0.$$

Odatle:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}. \qquad \text{(b)}$$

Kako zadanoj vrijednosti tangensa uvijek odgovaraju dva kuta, koji se razlikuju za 180° (vidi Repet. element. matematike III, § 12), dobijemo prema (b):

$$(2\alpha)_1 = \beta, \text{ odatle } \alpha_1 = \frac{\beta}{2},$$

$$(2\alpha)_2 = \beta + 180^0, \text{ odatle } \alpha_2 = \frac{\beta}{2} + 90^0 = \alpha_1 + 90^0,$$

tj. obje vrijednosti kuta α razlikuju se za 90°, a to znači da postoje dvije međusobno okomite osi pri čemu s obzirom na jednu os (označimo je sa U) ima moment tromosti I maksimalnu vrijednost, a s obzirom na drugu os (označimo je sa V) ima moment tromosti minimalnu vrijednost.

Računamo I_u'' da odredimo za koju vrijednost kuta α ima I_u maksimalnu, odnosno minimalnu vrijednost.

Prema (a):

$$I_u'' = 2(I_y - I_x)\cos 2\alpha + 4 I_{xy}\sin 2\alpha,$$

ili, ako izlučimo $2\cos 2\alpha$ dobijemo:

$$I_u'' = 2\cos 2\alpha\,[(I_y - I_x) + 2 I_{xy}\,\mathrm{tg}\,2\alpha]. \qquad (c)$$

Znamo, da će I_u imati maksimum za one α, za koje je $I_u'' < 0$, odnosno minimum za one α za koje je $I_u'' > 0$. Iz (c) vidimo da predznak I_u'' zavisi ne samo od veličine kuta α, već i od predznaka koeficijenata $(I_y - I_x)$ i I_{xy}. Prema tome moramo promotriti više slučajeva:

1) Neka je $I_y - I_x > 0$, tj. $I_y > I_x$, i
$I_{xy} > 0$.

U tom slučaju prema (b)

$$\mathrm{tg}\,2\alpha > 0, \text{ pa je}$$

$(2\alpha)_1 = \beta$ u I kvadrantu, dakle $\alpha_1 = \frac{\beta}{2}$ je također u I kvadrantu.

$(2\alpha)_2 = \beta + 180^0$ u III kvadrantu, dakle $\alpha_2 = \frac{\beta}{2} + 90^0 = \alpha_1 + 90^0$ u II kvadrantu.

Prema (c) je $I_u'' > 0$ za α_1, odnosno $I_u'' < 0$ za α_2. Dakle za α_1 ima I_u minimum, a za α_2 maksimum.

To znači: os U obzirom na koju ima lik maksimalni moment tromosti, leži u drugom kvadrantu, a os V obzirom na koju ima lik minimalni moment tromosti, u prvom kvadrantu.

2) Neka je $I_y - I_x < 0$, tj. $I_y < I_x$, i
$I_{xy} < 0$.

Opet je prema (b) $\mathrm{tg}\,2\alpha > 0$ pa je α_1, u I kvadrantu, a α_2 u II kvadrantu.

Ali je u tom slučaju prema (c)

$$I_u'' < 0 \quad \text{za } \alpha_1 \quad \text{i}$$
$$I_u'' > 0 \quad \text{za } \alpha_2,$$

pa I_u ima maksimum za α_1, odnosno minimum za α_2.

To znači: os U leži u I kvadrantu, a os V u II kvadrantu.

3) $I_y - I_x > 0$, tj. $I_y > I_x$, i
$I_{xy} < 0$.

Prema (b): $\mathrm{tg}\,2\alpha < 0$, pa je

$(2\alpha)_1$ u II kvadrantu, dakle α_1 je u I kvadrantu i

$(2\alpha)_2$ u IV kvadrantu, dakle α_2 je u II kvadrantu.

Prema (c) je u tom slučaju:

$$I_u'' < 0 \text{ za } \alpha_1 \text{ i}$$
$$I_u'' > 0 \text{ za } \alpha_2,$$

pa I_u ima dakle maksimum za α_1 odnosno minimum za α_2.

To znači: os U leži u I kvadrantu, a os V u II kvadrantu.

4) $$I_y - I_x < 0, \text{ tj. } I_y < I_x, \text{ i}$$
$$I_{xy} > 0.$$

Opet je prema (b) $\operatorname{tg} 2\alpha < 0$, pa je α_1 u I kvadrantu, a α_2 u II kvadrantu.

Ali je u tom slučaju prema (c):

$$I_u'' > 0 \text{ za } \alpha_1 \text{ i}$$
$$I_u'' < 0 \text{ za } \alpha_2,$$

pa I_u ima minimum za α_1, odnosno maksimum za α_2.

To znači os U leži u II kvadrantu, a os V u I kvadrantu.

Navedena diskusija ima veliko praktičko značenje, jer na temelju dobivenih zaključaka određujemo tačan položaj osiju U i V, obzirom na koje ima moment tromosti I ravna lika najveću vrijednost I_u, odnosno najmanju vrijednost I_v.

5. NAJOPĆENITIJI DOVOLJNI UVJET ZA EKSTREM

Do sada smo uzeli samo one slučajeve, kad je pri određivanju ekstremnih vrijednosti funkcije druga derivacija funkcije y'' bila različita od nule u nultačkama prve derivacije funkcije. Pretpostavimo sada rjeđi slučaj da smo tražili ekstremne vrijednosti neke zadane funkcije $y = y(x)$ i da smo dobili $y'' = 0$ u tački $x = x_1$ gdje je x_1 korijen jednadžbe $y' = 0$. Znamo već da je $y'' = 0$ nuždan uvjet za tačku infleksije, pa možemo samo zaključiti, da funkcija y ima za $x = x_1$ ili ekstrem, jer je $y'(x_1) = 0$, ili tačku infleksije s horizontalnom tangentom, jer se u toj tački x_1 poništava osim prve i druga derivacija funkcije. Da riješimo pitanje ima li funkcija za $x = x_1$ ekstrem ili tačku infleksije, računamo treću derivaciju funkcije y''' i uvrštavamo $x = x_1$. Ako je $y'''(x_1) \neq 0$, funkcija u tački $x = x_1$ ekstrema nema, već ima tačku infleksije, a ako je $y'''(x_1) = 0$, računamo četvrtu derivaciju funkcije $y^{(IV)}$ i uvrštavamo naš $x = x_1$. Ako je $y^{(IV)}(x_1) \neq 0$, funkcija za $x = x_1$ ima ekstrem i to za $y^{(IV)}(x_1) < 0$ maksimum, a za $y^{(IV)}(x_1) > 0$ minimum. Dobijemo li i $y^{(IV)}(x_1) = 0$, računajmo $y^{(V)}$ itd.

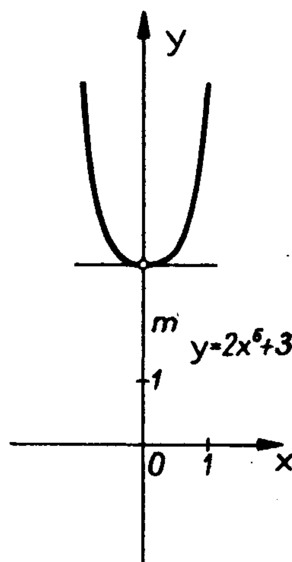
Općenito možemo dakle dovoljan uvjet za ekstrem izraziti ovako:

Ako je od derivacija funkcije prva koja se nije poništila u tački $x = x_1$ u kojoj je $y' = 0$, parnoga reda, tj. reda drugog, četvrtog itd., funkcija ima u toj tački ekstrem i to:

maksimum, ako je ta parna derivacija u tački $x = x_1$ negativna, odnosno minimum, ako je pozitivna. Ne poništi li se u tački $x = x_1$ derivacija neparnog reda, tj. reda trećeg, petog itd., funkcija za $x = x_1$ nema ekstrema, već ima tačku infleksije s horizontalnom tangentom.

Pokažimo to na primjerima.

Odredi ekstremne vrijednosti funkcije:



Sl. 125.

1. $y = 2x^6 + 3$

$y' = 12x^5$

$y' = 0, \quad 12x^5 = 0$

$x^5 = 0, \quad x_{1,2,3,4,5} = 0$

ili $\underline{x_0 = 0}$ | samo za $x_0 = 0$ može funkcija imati ekstrem

$y'' = 60x^4$

$y''(0) = 0$

$y''' = 240x^3$

$y'''(0) = 0$

$y^{(IV)} = 720x^2$

$y^{(IV)}(0) = 0$

$y^{(V)} = 1440x$

$y^{(V)}(0) = 0$

$y^{(VI)} = 1440$

$\underline{y^{(VI)}(0) = 1440}$

Prva se nije poništila šesta derivacija, tj. derivacija *parnog* reda, dakle za $x_0 = 0$ ima funkcija ekstrem i to minimum, jer je $y^{(VI)}(x_0) = y^{(VI)}(0) = 1440 > 0$.

$\underline{y_{min} = y(0) = 3}$. Vidi sl. 125 koja predočuje funkciju $y = 2x^6 + 3$.

2. $y = 3x^5 - 2$ (vidi sl. 126)

$y' = 15x^4$

$y' = 0: \quad 15x^4 = 0$

$x_{1,2,3,4} = 0$ ili $\underline{x_0 = 0.}$

Samo za $x_0 = 0$ može funkcija imati ekstrem.

$y'' = 60x^3$

$y''(0) = 0$

$y''' = 180x^2$

$y'''(0) = 0$

$y^{(IV)} = 360x$

$y^{(IV)}(0) = 0$

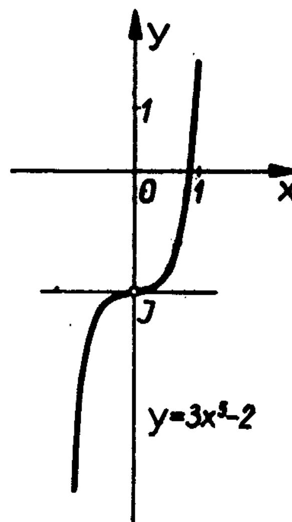
$y^{(V)} = 360$

$y^{(V)}(0) = 360.$

Prva se nije poništila peta derivacija, tj. derivacija neparnog reda, dakle zadana funkcija ekstrema nema, već ima za $x_0 = 0$ tačku infleksije s horizontalnom tangentom.

$$y_0 = y(0) = -2.$$

Tačka infleksije $I(0, -2)$.



Sl. 126.

Iz gornjih primjera jasno razabiremo, da će se y' i y'' poništavati u istoj tački samo u tom slučaju kad je nultačka prve derivacije funkcije višestruka.

3. Odredi ekstremne vrijednosti funkcije

$y = \sin^3 x$

$y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$

$y' = 0$: $3\sin^2 x \cdot \cos x = 0$

$\sin^2 x = 0$

$\sin x = 0$ $\qquad\qquad \cos x = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad\qquad x_3 = \frac{\pi}{2}$

$x_2 = \pi$ $\qquad\qquad x_4 = \frac{3\pi}{2}$

Samo za te vrijednosti od x može y imati ekstrem.

$$y'' = 3(-\sin^2 x \cdot \sin x + \cos x \cdot 2\sin x \cdot \cos x)$$

$$y'' = 3(-\sin^3 x + 2\sin x \cdot \cos^2 x)$$

$$y''(x_1) = 3(-\sin^3 0 + 2\sin 0 \cdot \cos^2 0) = 3(0 + 2 \cdot 0 \cdot 1) = 0$$

$$y''(x_2) = 3(-\sin^3 \pi + 2\sin \pi \cdot \cos^2 \pi) = 3(0 + 2 \cdot 0 \cdot 1) = 0.$$

Za $x_1 = 0$ i $x_2 = \pi$ treba računati y'''.

$$y''(x_3) = 3\left(-\sin^3\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos^2\frac{\pi}{2}\right) = 3(-1 + 2 \cdot 1 \cdot 0) = -3 < 0$$

za $x_3 = \frac{\pi}{2}$ ima funkcija maksimum.

$$y_{maks} = y(x_3) = \sin^3\frac{\pi}{2} = 1.$$

$$y''(x_4) = 3\left(-\sin^3\frac{3\pi}{2} + 2\sin\frac{3\pi}{2} \cdot \cos^2\frac{3\pi}{2}\right) = 3(+1 - 2 \cdot 1 \cdot 0) = 3 > 0$$

za $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ ima funkcija minimum.

$$y_{min} = y(x_4) = \sin^3\frac{3\pi}{2} = -1.$$

$$y''' = 3[-3\sin^2 x \cos x + 2(-\sin x \cdot 2\cos x \sin x + \cos^2 x \cdot \cos x)]$$

$$y''' = 3\,[-3\sin^2 x\cos x + 2\cos x\,(\cos^2 x - 2\sin^2 x)]$$

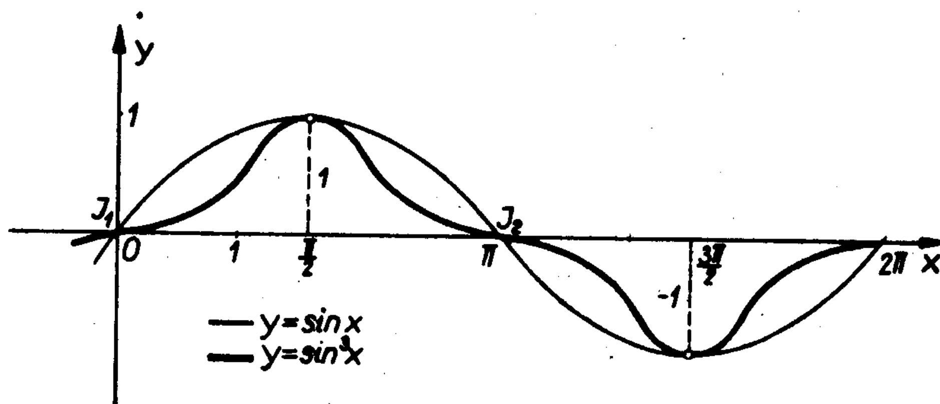
$$y'''(x_1) = y'''(0) = 3\,[0 + 2\,(1 - 0)] = 6:$$

tačka infleksije za $x_1 = 0$ kojoj je ordinata

$$y_1 = y(0) = \sin^3 0 = 0. \quad \underline{I_1\,(0, 0).}$$

$$y'''(x_2) = y'''(\pi) = 3\,[0 - 2\,(1 - 0)] = -6.$$

Za $x_2 = \pi$ ima funkcija tačku infleksije, kojoj je ordinata $y_2 = y(\pi) = \sin^3 \pi = 0$. $\underline{I_2\,(\pi,\ 0).}$



Sl. 127.

Sl. 127 prikazuje graf funkcije $y = \sin^3 x$, koji je dobiven iz grafa funkcije $\sin x$ tako, da su se pojedine ordinate te funkcije kubirale.

6. ODREĐIVANJE TAČAKA INFLEKSIJE FUNKCIJE $y = f(x)$

Već smo prije naveli *nužni uvjet za tačku infleksije funkcije* $y = f(x)$: *u tački infleksije druga derivacija funkcije* $y'' = 0$. To znači: korijeni jednadžbe $y'' = 0$ daju one vrijednosti argumenta x, samo za koje funkcija *može* imati tačke infleksije, ali ne mora da ih ima, jer bi mogle biti tačke ekstrema.

Iz onoga, što smo naveli za određivanje ekstremnih vrijednosti funkcije, jasno slijedi *dovoljni uvjet za tačku infleksije: ako je derivacija funkcije koja se prva nije poništila u tački* $x = x_1$ *u kojoj je* $y'' = 0$ *neparnog reda, funkcija za* $x = x_1$ *ima tačku infleksije.*

Prema tome se tačke infleksije funkcije $y = f(x)$ određuju na isti način, kao i tačke ekstrema, razlika je samo u tome, da se sa nulom izjednači ne prva, već *druga* derivacija funkcije.

Navedimo nekoliko primjera.

Odredi tačke infleksije funkcija:

1. $y = x^3$.

a) Računamo y' i odmah iza toga y'':

$$y' = 3x^2$$
$$y'' = 6x.$$

b) Stavimo $y'' = 0$ i riješimo tako dobivenu jednadžbu:

$$y'' = 0, \quad 6x = 0$$

$x_1 = 0$ Samo za $x_1 = 0$ može biti tačka infleksije.

c) Računamo y''':

$$y''' = 6.$$

d) Uvrštavamo u y''' $x_1 = 0$:

$$y'''(x_1) = y'''(0) = 6.$$

Nije se poništila derivacija trećeg, tj. neparnog reda, dakle za $x_1 = 0$ ima funkcija tačku infleksije.

Imali smo

$$y'''(0) = 6 > 0.$$

Pozitivni predznak III derivacije kazuje, da funkcija u tački infleksije prelazi iz konveksnog dijela u konkavni.

e) Računamo ordinatu y_1 tačke infleksije:

$$y_1 = y(x_1) = y(0) = 0.$$

Tačka infleksije $\underline{I(0, 0)}$. (Vidi sl. 31).

2. Na str. 175 naveli smo kao primjer određivanje ekstremnih vrijednosti funkcije

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5.$$

Odredimo sada tačku infleksije te funkcije.

Računamo:

$$y' = x^2 - 2x - 3$$
$$y'' = 2x - 2.$$

Stavimo:

$$y'' = 0 \quad \text{ili} \quad 2x - 2 = 0.$$

Odatle: $x_1 = 1$. Samo za $x_1 = 1$ može biti tačka infleksije zadane funkcije.

Računamo:

$$y''' = 2, \quad y'''(x_1) = y'''(1) = 2.$$

Za $x_1 = 1$ nije se poništila derivacija trećeg, tj. neparnog reda, dakle za $x_1 = 1$ ima funkcija tačku infleksije. Da odredimo ordinatu tačke infleksije, uvrstimo $x_1 = 1$ u zadanu funkciju.

Dobijemo:

$$y_1 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 5 = 1\frac{1}{3} = 1{,}3.$$

Dakle tačka infleksije $I(1;\ 1{,}3)$. (Vidi sl. 121).

3. $y = \sin x$

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

$y'' = 0: \qquad -\sin x = 0$

$\sin x = 0 \qquad x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ | Samo za ove x može funkcija imati tačke infleksije u toku jednog perioda.

$$y''' = -\cos x$$

$$y'''(x_1) = y'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$y'''(x_2) = y'''(\pi) = -\cos \pi = 1.$$

Za $x = x_1$ i $x = x_2$ nisu se poništile derivacije III tj. neparnog reda, dakle u $x_1 = 0$ i u $x_2 = \pi$ ima funkcija tačke infleksije, pri čemu u prvoj tački infleksije krivulja prelazi iz konkave u konveksu, a u drugoj imamo obratni slučaj, jer je $y'''(x_1) = -1 < 0$, a $y'''(x_2) = 1 > 0$.

Ordinate tačke infleksije:

$$y_1 = y(0) = \sin 0 = 0$$

$$y_2 = y(\pi) = \sin \pi = 0.$$

Prva tačka infleksije $I_1(0, 0)$

Druga tačka infleksije $I_2(\pi, 0)$. (Vidi sl. 46).

4. $y = (x + 1)^4 + e^x$

$y' = 4(x + 1)^3 + e^x$

$y'' = 12(x + 1)^2 + e^x.$

Ali $y'' \neq 0$ za sve x, jer su oba člana $(x + 1)^2$ i e^x uvijek pozitivna. Zadana funkcija nema tačaka infleksije (graf funkcije je konkavan).

7. ODREĐIVANJE EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI IMPLICITNIH FUNKCIJA

U III dijelu Repetitorija više matematike pokazali smo, kako se odrede prva i druga derivacija implicitne funkcije $f(x, y) = 0$, pa smo dobili za te derivacije formule:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Vidi Dio III § 4, 11. Formule (90) i (91).

Drugu formulu možemo pojednostaviti tako, da u nju uvrstimo prvu formulu. Nakon uređanja dobijemo:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \qquad \text{(a)}$$

Da odredimo ekstremne vrijednosti implicitne funkcije $f(x, y) = 0$, stavimo kao obično

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$$

pa je
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{(b)}$$

n u ž n i u v j e t z a e k s t r e m.

Riješimo li sustav jednadžbi $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $f(x, y) = 0$,

dobit ćemo vrijednosti $x = x_0$ i $y = y_0$. Da odredimo da li je dobivena vrijednost y_0 maksimum ili minimum zadane funkcije $f(x, y) = 0$, prelazimo na dovoljni uvjet.

D o v o l j n i u v j e t z a e k s t r e m daje y'', koja u tom slučaju prima vrlo jednostavan oblik.

Uvrstimo li $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ u (a), dobijemo:

$$y'' = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \text{(c)}$$

Iz te jednakosti slijedi, da je

$y'' < 0$ ako su $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ za $x = x_0$ i $y = y_0$ i s t o g predznaka, pa je y_0 traženi m a k s i m u m zadane funkcije.

$y'' > 0$ ako su $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ za $x = x_0$ i $y = y_0$ r a z l i č i t o g predznaka, pa je y_0 m i n i m u m zadane funkcije.

Dobijemo li za $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ili $\frac{\partial f}{\partial y}$ u tački (x_0, y_0) nulu, ne možemo zadatak analitički riješiti, jer bi daljnji izvodi bili prekomplicirani.

Primjer.

Odredi ekstremnu vrijednost funkcije

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 72x + 96y - 144 = 0 .$$

Prema (b) računamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 32x - 24y + 72 = 0 .$$

Odatle

$$x_0 = \frac{3y - 9}{4} .$$

Uvrštenje vrijednosti dobivene za x_0 u zadanu funkciju daje nakon uređenja:

$$150y = 225$$

pa je

$$\underline{y_0 = \frac{3}{2} \text{ i } x_0 = -\frac{9}{8}} .$$

Računamo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 32$$

a uvrštenje $x_0 = -\frac{9}{8}$ i $y_0 = \frac{3}{2}$ u

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -24x + 18y + 96$$

daje

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 150 .$$

Dobili smo za $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ iste predznake, dakle $y_0 = \frac{3}{2}$ je traženi maksimum funkcije.

Odredi ekstremne vrijednosti funkcija:

1. $$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 6x + 9y + 2 = 0 .$$

$$\left[y_{maks} = \frac{1}{72} \text{ za } x_0 = -\frac{35}{48}\right]$$

2. $$4x^2 - 5xy + 2y^2 + 2x - 5y + 3 = 0 .$$

$$[y_{maks} = 7{,}75 \text{ za } x_1 = 4{,}58; \; y_{min} = 0{,}813 \text{ za } x_2 = 0{,}258]$$

Grafove zadanih funkcija vidi Repetitorij elementarne matematike str. 225 (sl. 124) i 222 (sl. 122).

§ 18.

KINEMATIČKO ZNAČENJE PRVE I DRUGE DERIVACIJE FUNKCIJE

Znamo već, da predznak derivacije pokazuje, da li funkcija u dotičnoj tački raste ili opada, a vrijednost derivacije daje intenzitet ili brzinu toga rasta ili pada.

Prema tome, ako nam je zadana jednadžba gibanja materijalne tačke, tj. put s kao funkcija vremena t: $s = s(t)$, derivacija puta s po vremenu t, tj. $s'(t)$ dat će brzinu promjene puta u dotičnom momentu t, tj. brzinu gibanja v tačke u tom momentu t:

$$\text{brzina} \quad v(t) = s'(t). \tag{135}$$

Idemo li dalje i deriviramo li po vremenu t brzinu $v(t)$ ili drugi put put $s(t)$, dobit ćemo brzinu promjene brzine u dotičnom momentu tj. ubrzanje (akceleraciju) a gibanja tačke u tom momentu t:

$$\text{ubrzanje} \quad a(t) = v'(t) = s''(t). \tag{136}$$

Brzina gibanja u momentu t je prva derivacija po vremenu izraza, kojim je put zadan kao funkcija vremena, a ubrzanje je prva derivacija po vremenu izraza, kojim je brzina zadana kao funkcija vremena, ili druga derivacija po vremenu izraza za put.

Ukratko se kaže:

Brzina je prva derivacija puta po vremenu, a ubrzanje je prva derivacija brzine po vremenu ili druga derivacija puta po vremenu.

Primjeri.

1. Odredi brzinu i ubrzanje jednolikog gibanja u momentu t.

Jednoliko gibanje zadano je jednadžbom:

put $s(t) = s_0 + ct$, gdje je s_0 put u momentu $t = 0$, a c je konstanta;

brzina u momentu t: $v(t) = s'(t) = c =$ konstanta,

ubrzanje $a(t) = v'(t) = s''(t) = 0$,

tj. brzina je konstantna, a ubrzanja nema.

2. Odredi brzinu i ubrzanje slobodnog pada u momentu t.

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

brzina: $v(t) = s' = \frac{1}{2} g \cdot 2t = gt,$

ubrzanje: $a(t) = v'(t) = s'' = g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 = \text{konstanta}.$

3. Odredi brzinu i ubrzanje harmoničkog gibanja. (Vidi str. 70).

put: $s = A \sin(mt + n)$

brzina: $v = s' = Am \cos(mt + n)$

ubrzanje: $a = v' = s'' = -Am^2 \sin(mt + n),$

tj. brzina je zadana kosinusom, a put i ubrzanje sinusom.

Iz gornjih izraza za put s, brzinu v i ubrzanje a harmoničkog gibanja slijedi, da kad je argument $(mt + n)$ sinusa, odnosno kosinusa jednak nuli tj. $mt + n = 0$, a odatle je $t = -\frac{m}{n}$, put s i ubrzanje a jednaki su nuli, a brzina v ima maksimalnu vrijednost Am. Kad je

$$mt + n = \frac{\pi}{2}, \text{ odnosno } t = \frac{\pi - 2n}{2m},$$

put s i ubrzanje a postizavaju ekstremne vrijednosti A, odnosno $-Am^2$ dok je brzina $v = 0$. Kao primjer navedimo njihalo, koje kako je poznato vrši približno harmoničko gibanje. U najnižoj tački put $s = 0$ i ubrzanje $a = 0$ dok je brzina v maksimalna, u najvišoj tački su put i ubrzanje ekstremni dok je brzina $v = 0$.

Uvrstimo li $A \sin(mt + n) = s$ u izraz za ubrzanje a, dobit ćemo

$$a = s'' = -m^2 s,$$

tj. ubrzanje je razmjerno s putom kod harmoničkog gibanja.

Odatle:

$$s'' + m^2 s = 0.$$

To je diferencijalna jednadžba harmoničkog gibanja

4. Odredi put, brzinu i ubrzanje na početku 4. sekunde za materijalnu tačku, čija jednadžba gibanja glasi:

$$s = \frac{4}{3} t^3 - t + 5$$

(put s je izražen u metrima, a vrijeme t u sekundama).

$$v(t) = s' = 4t^2 - 1.$$

$$a(t) = v' = s'' = 8t.$$

Na početku 4. sekunde znači na kraju 3. sekunde, dakle uvrstimo $t = 3$:

put $s(3) = \frac{4}{3} \cdot 27 - 3 + 5 = \underline{38 \text{ m}}$

brzina $v(3) = 4 \cdot 9 - 1 = \underline{35 \text{ m/s}}$

ubrzanje $a(3) = 8 \cdot 3 = \underline{24 \text{ m/s}^2}.$

§ 19.

PRIBLIŽNO RJEŠAVANJE ALGEBARSKIH I TRANSCENDENTNIH JEDNADŽBI

1. OPĆENITO O RJEŠAVANJU JEDNADŽBI

Svaka jednadžba koja se dade svesti na oblik

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

zove se algebarska. Svaka druga jednadžba zove se transcendentna.

Znamo riješiti linearnu jednadžbu $a_1 x + a_0 = 0$ i opću kvadratnu jednadžbu $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, ali ne znamo riješiti opće jednadžbe viših stepena. Postoje vrlo složene formule za korijene općih algebarskih jednadžbi trećeg i četvrtog stepena, dok za jednadžbe još viših stepena uije moguće izvesti takve formule. Praktički se opće jednadžbe stepena višeg od drugoga rješavaju približno i to grafičkim ili računskim načinom.

2. GRAFIČKI NAČIN

Zadana jednadžba rastavi se u dvije funkcije, čiji sa grafovi narišu u istom koordinatnom sustavu. Apscise sjecišta tih grafova uzete iz slike paju približne vrijednosti traženih korijena jednadžbe.

Primjeri.

Riješi grafičkim putem jednadžbe:

1. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$

Stavimo li $x^3 = y$, tada je

$$y - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

pa se dobiju dvije funkcije:

I. $y = x^3$ i

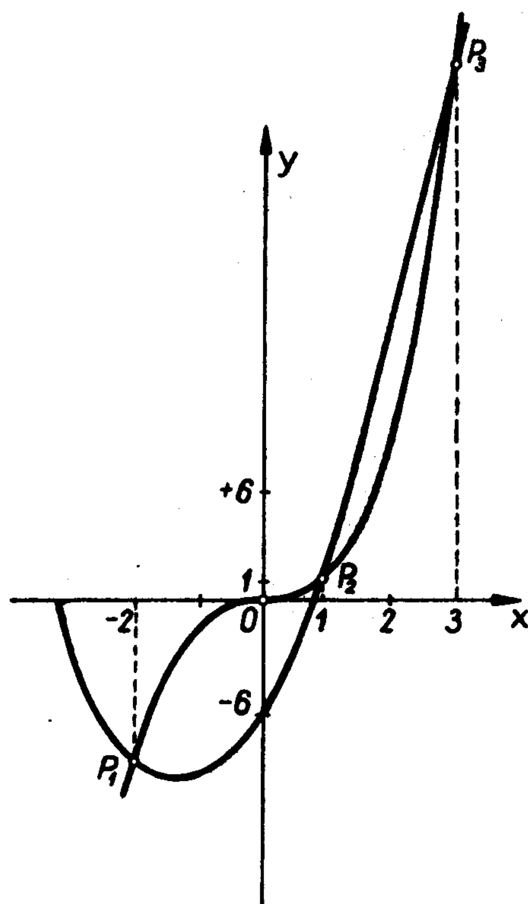
II. $y = 2x^2 + 5x - 6,$

koje općenito primaju različite vrijednosti y za iste vrijednosti x.

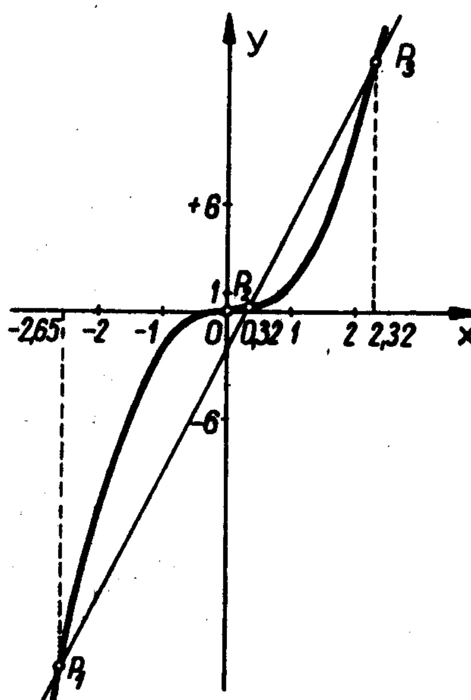
Iz načina kako su nastale te dvije funkcije slijedi, da će one vrijednosti x biti traženi korijeni zadane kubne jednadžbe za koje obje funkcije imaju istu vrijednost. Grafički će to biti apscise sjecišta grafova obiju funkcija. Narišemo li dakle na milimetarskom papiru u istom koordinatnom sustavu grafove tih funkcija [vidi § 4, 1, b)] očitat ćemo iz tako dobivene slike 128 tražene korijene zadane jednadžbe:

$$\underline{x_1 = -2,} \qquad \underline{x_2 = 1,} \qquad \underline{x_3 = 3.}$$

Uvrštenje tih vrijednosti korijena u zadanu jednadžbu daje nulu, što pokazuje da su korijeni tačno određeni.



Sl. 128.



Sl. 129.

2. $x^3 - 6{,}33x + 2 = 0.$

Stavimo li: $y = x^3$, dobijemo $y - 6{,}33x + 2 = 0$, a odatle
$y = 6{,}33x - 2.$

Iz slike 129 čitamo

$$\underline{x_1 = -2{,}65,} \qquad \underline{x_2 = 0{,}32,} \qquad \underline{x_3 = 2{,}32.}$$

Vidimo da grafičko rješavanje postaje jednostavno, ako je jedna funkcija linearna (pravac).

3. $x^4 - 2x^2 - 0{,}4x - 0{,}8 = 0.$

Zadanu jednadžbu rastavimo u dvije funkcije:

$$y = x^4 - 2x^2$$

i $\qquad y = 0{,}4x + 0{,}8.$

Najprije narišemo graf linearne funkcije (pravac), a da narišemo graf polinoma 4. stepena odredimo njegove nultačke, ekstremne vrijednosti i vrijednosti za

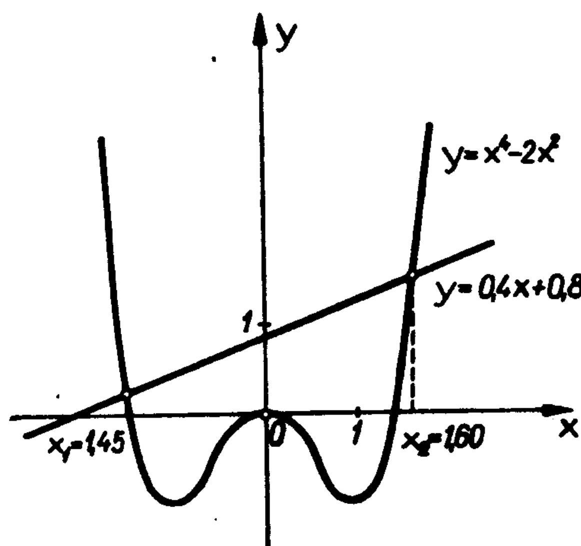
$$x_8 = 1,5 = \frac{3}{2} \text{ i } x_9 = 1,75 = \frac{7}{4}$$

uzevši naravno u obzir da je funkcija parna $y(-x) = y(x)$, pa je njen graf simetričan na os Y.

Stavimo dakle $y = 0$:

$$x^4 - 2x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 2) = 0$$

$x^2 = 0$	$x_{1,2} = 0$	Nultačke
$x^2 - 2 = 0$	$x_{3,4} = \pm\sqrt{2} = \pm 1,41$	funkcije



Sl. 130.

Računamo y' i stavimo $y' = 0$

$$4x^3 - 4x = 0$$
$$4x(x^2 - 1) = 0 \qquad x_5 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1 \qquad x_{6,7} = \pm 1.$$

Računamo $y'' = 12x^2 - 4$

$y''(0) = -4 < 0$

maksimum za $x_5 = 0$

$y''(\pm 1) = 8 > 0$

minimum za $x_{6,7} = \pm 1$.

$y_{max} = y(0) = 0$

$y_{min} = y(\pm 1) = -1.$

$$y(x_8) = y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{16} - \frac{18}{4} = \frac{81 - 72}{16} = \frac{9}{16} = 0,56$$

$$y(x_9) = y\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{2401}{256} - \frac{98}{16} = \frac{833}{256} = 3,25.$$

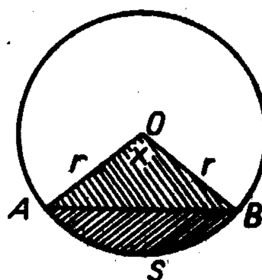
Sada rišemo sliku funkcije (vidi sl. 130) i čitamo:

$\underline{x_1 = -1,45,}$ $\qquad$ $\underline{x_2 = 1,60,}$ $\qquad$ $\underline{x_3 \text{ i } x_4 \text{ su kompleksni.}}$

Naravno i transcendentne jednadžbe možemo rješavati grafičkim načinom.

• Primjer.

Odredi onaj središnji kut u krugu polumjera r, čija tetiva raspolavlja ploštinu pripadnog isječka (sektora) kruga (vidi sl. 131).



Sl. 131.

Budući da tetiva AB raspolavlja ploštinu S isječka kruga, tj. ploština $\triangle AOB$ = ploština odsječka (segmenta) kruga, imamo

$$S = 2\,\text{pl.}\triangle AOB. \qquad \text{(a)}$$

Također $S = \frac{s \cdot r}{2}$, gdje je $s = \widehat{AB}$ (v. Repet. element. matematike) ili $S = \frac{1}{2} r^2 x$, jer je prema (40) $s = r \cdot x$, gdje je x lučna mjera kuta AOB.

Osim toga znamo da je pl. $\triangle AOB = \frac{1}{2} r^2 \sin x$ (v. Repet. element. matematike III, § 15).

Uvrštenje vrijednosti za S i za pl. AOB u (a) daje:

$$\frac{1}{2} r^2 x = r^2 \sin x$$

ili

$$\frac{1}{2} x - \sin x = 0,$$

a to je transcendentna jednadžba.

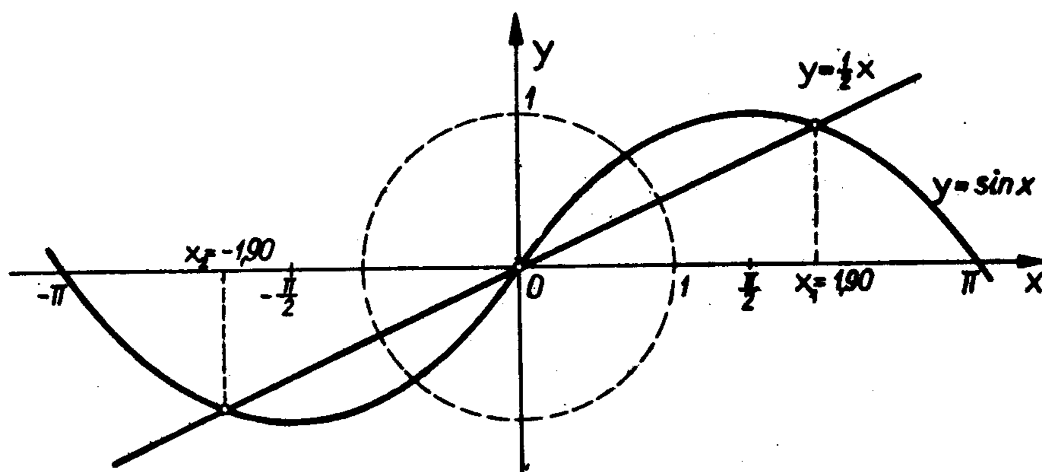
Rastavimo je u dvije funkcije

$$y = \frac{1}{2} x$$

i

$$y = \sin x,$$

koje prikažemo grafički u istom koordinatnom sustavu.



Sl. 132.

Dobijemo sliku 132, iz koje čitamo:

$$\underline{x_1 = 1{,}90} \qquad (x_2 = -1{,}90)$$

ili u kutnoj mjeri $\underline{x = 108{,}6^0.}$

3. RAČUNSKI NAČIN

Rješavanje jednadžbi grafičkim načinom je težak posao, koji traži mnogo vremena, dok se tačnost dobivenih rezultata teško dade povećati. Stoga se češće primjenjuje računski način, koji daje mogućnost odrediti korijene jednadžbe na potrebni broj decimala tačno, pri čemu se kadšto grafičkim načinom određuje prva polazna aproksimacija (približna vrijednost) traženog korijena.

Navedimo nekoliko metoda računskog načina rješavanja jednadžbi.

a) Metoda sekante ili regula falsi (pravilo krivih podataka)

Osnovno načelo te metode: luk krivulje nadomjesti se sekantom, tj. vrši se linearna interpolacija funkcije (potanko o interpolaciji vidi dalje § 22).

Prema toj metodi traženi korijen zadane jednadžbe $f(x) = 0$ približno se odredi tako, da se grafičkim ili računskim putem odrede dvije međusobno što bliže vrijednosti x_1 i x_2, za koje funkcija $f(x)$ ima vrijednosti različitih predznaka, npr. $y_1 = f(x_1) < 0$, a $y_2 = f(x_2) > 0$. (U praktičkim zadacima obično se zna približni položaj traženog korijena). Ako je funkcija $f(x)$, neprekinuta, između x_1 i x_2 leži bar jedna nultačka funkcije tj. bar jedan korijen jednadžbe $f(x) = 0$. (Vidi svojstvo 2) neprekinute funkcije u § 8, 6).

Između x_1 i x_2 bit će samo jedan korijen jednadžbe, ako je $f'(x)$ istog predznaka u intervalu od x_1 do x_2, tj. ako $f(x)$ u tom intervalu stalno raste $[f'(x) > 0]$ ili stalno pada $[f'(x) < 0]$ (vidi § 17, 1). To možemo uvijek postići stegnuvši jače interval od x_1 do x_2.

Luk krivulje $f(x)$ između x_1 i x_2, koji siječe os X u traženoj nultački x_0, nadomjestimo sekantom AB, koja siječe os X u tački x_3, pa za prvu aproksimaciju traženog korijena x_0 uzimamo tu vrijednost x_3 (vidi sl. 133).

Jednadžba sekante AB kao pravca kroz dvije zadane tačke glasi:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Sekanta siječe os X u tački $(x_3, 0)$. Uvrštenje tih koordinata sjecišta u jednadžbu pravca daje:

$$-y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1).$$

Odatle računamo x_3.

Množeći gornju jednadžbu sa $\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ dobijemo:

$$-\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1 = x_3 - x_1,$$

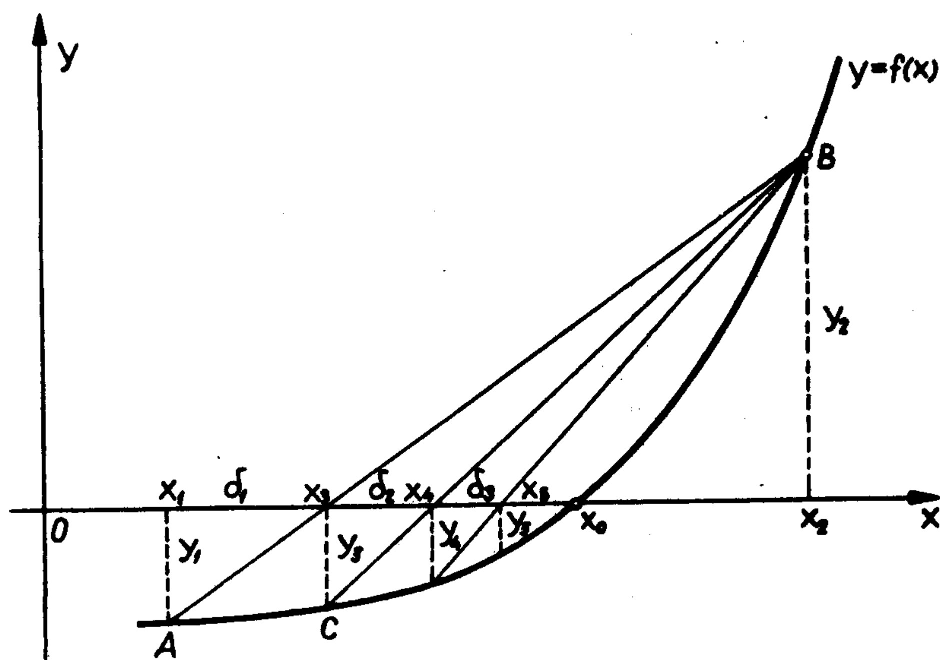
a odatle je

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1 \qquad (137)$$

ili

$$x_3 = x_1 + \delta_1,$$

gdje je $\delta_1 = -\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1 =$ korekcija vrijednosti x_1. (Vidi sl. 133).



Sl. 133.

Ako nas tačnost prve aproksimacije x_3 ne zadovoljava, računamo $y_3 = f(x_3)$, tj. ordinatu tačke $C(x_3, y_3)$, pa luk CB krivulje nadomjestimo novom sekantom CB, čiju apscisu sjecišta x_4 s osi X dobijemo iz (137), ako mjesto x_1 i y_1 uvrstimo x_3 i y_3, jer ulogu tačke $A(x_1, y_1)$ igra sada tačka $C(x_3, y_3)$.

Dobijemo

$$x_4 = x_3 - \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} y_3 \qquad (137a)$$

ili

$$x_4 = x_3 + \delta_2,$$

gdje je $\delta_2 = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} y_3$ korekcija za x_3.

Postupak nastavljamo:

$$x_5 = x_4 - \frac{x_2 - x_4}{y_2 - y_4} y_4 \qquad (137b)$$

ili

$$x_5 = x_4 + \delta_3,$$

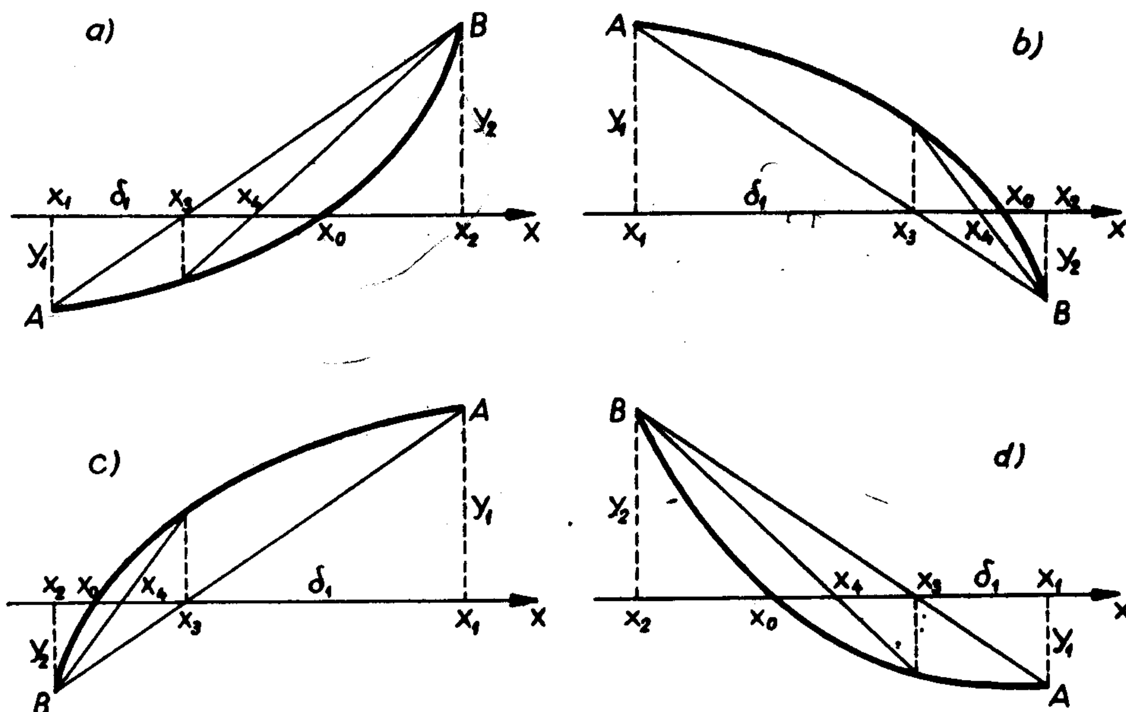
gdje je δ_3 korekcija za x_4 itd.,

dok ne dobijemo traženi korijen x_0 na potreban broj decimala tačno.

Kako se vidi iz slike 133, sekanta *AB* okreće se kod toga postupka oko tačke *B*, a njeno sjecište s osi *X* približava se sve više i više traženom korijenu x_0 jednadžbe, pa vrijednost korijena možemo izračunati po volji tačno.

Napomene.

1) Formule (137) vrijede za svaki oblik i položaj krivulje $f(x)$ u okolišu tražene nultačke naravno uz uvjet da se vrijednosti x_1 i y_1, x_2 i y_2 itd. uvrštavaju u formule (137) s njihovim predznacima.



Sl. 134.

2) Kako se vidi iz slike 134, za polaznu tačku A s koordinatama x_1, y_1 uzet ćemo u slučaju a) i b) *lijevu* tačku A, pa će se sekante okretati oko desne tačke $B(x_2, y_2)$, a u slučaju c) i d) — *desnu* tačku $A(x_1, y_1)$, a sekante će se sada okretati oko lijeve tačke $B(x_2, y_2)$. U slučaju a) i d) krivulja je konkavna, pa je $y'' > 0$ između x_1 i x_2, dok je $y_1 < 0$, a u slučaju b) i c) krivulja je konveksna, pa je $y'' < 0$, dok je $y_1 > 0$ (vidi § 17,3).

Odatle slijedi jednostavno pravilo:

Za polaznu tačku $A(x_1, y_1)$ uzmi onu tačku, čija ordinata ima protivni predznak od druge derivacije funkcije izračunate za neku tačku u okolišu traženog korijena x_0.

Ako je npr. $y'' < 0$, uzet ćemo za polaznu tačku onu tačku A, kojoj je ordinata pozitivna.

Primjeri.

1. Odredi na 2 decimale tačno jedan korijen kubne jednadžbe

$$x^3 + x - 8 = 0.$$

Pripadna funkcija glasi: $y = x^3 + x - 8$

$$\text{za } x_1 = 1, \quad y_1 = -6 < 0, \text{ a}$$

$$\text{za } x_2 = 2, \quad y_2 = +2 > 0.$$

Dakle između $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$ leži bar jedan korijen zadane jednadžbe.

$$y' = 3x^2 + 1 > 0 \text{ za sve } x \text{ od } x_1 = 1 \text{ do } x_2 = 2.$$

Dakle između $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$ funkcija raste te ima samo jednu nultačku u tom intervalu.

$y'' = 6x > 0$ za sve x od 1 do 2 (krivulja je konkavna), te ćemo prema gore navedenome pravilu za polaznu tačku uzeti tačku s negativnom ordinatom, tj. *lijevu* tačku $A(x_1 = 1,\ y_1 = -6)$ dok će se sekanta okretati oko *desne* tačke $B(x_2 = 2,\ y_2 = 2)$, (sl. 134,a).

Prelazimo na računanje, koje vršimo pomoću logaritamskog računala.

Prema (137)

$$x_3 = 1 - \frac{2-1}{2-(-6)}(-6)$$

$$x_3 = 1 + \frac{3}{4} = \underline{1,75},$$

$$y_3 = y(x_3) = 1,75^3 + 1,75 - 8 = -0,892 \approx -\underline{0,9}.$$

Prve vrijednosti računamo samo na jednu decimalu tačno, a dalje tačnost računanja sukcesivno povećavamo.

Prema (137a)

$$x_4 = 1,75 - \frac{2-1,75}{2-(-0,9)}(-0,9)$$

$$x_4 = 1,75 + \frac{0,25 \cdot 0,9}{2,9}$$

$$x_4 = 1,75 + 0,08 = 1,83$$

$\underline{x_4 = 1,83}$

$y_4 = y(x_4) = 1,83^3 + 1,83 - 8 = -0,04$

$\underline{y_4 = -0,04.}$

Prema (137b): $x_5 = 1,83 - \frac{2 - 1,83}{2 - (-0,04)} (-0,04)$

$$x_5 = 1,83 + \frac{0,17 \cdot 0,04}{2,04} = 1,83 + \frac{0,0068}{2,04} = 1,83 + 0,003 = 1,833.$$

$\underline{x_5 = 1,833}$

$y_5 = 1,833^3 + 1,833 - 8 = \underline{-0,008.}$

Iz uspoređenja vrijednosti dobivenih za x_4 i x_5 ($x_4 = 1,83$, $x_5 = 1,833$) vidimo, da su prve dvije decimale zajamčene, pa *traženi korijen jednadžbe* $x^3 + x - 8 = 0$ jest $x_0 = 1,83$ na *2 decimale tačno*.

Podijelimo li zadanu jednadžbu s $x - x_0 = x - 1,83$ dobit ćemo kvadratnu jednadžbu koju riješimo. Opazit ćemo da su ostala dva korijena zadane kubne jednadžbe konjugirano kompleksna.

2. Odredi korijen jednadžbe $x^3 - 6x + 2 = 0$, tj. nultačke funkcije $y = x^3 - 6x + 2$ na 2 decimale tačno.

Rastavimo li funkciju u dvije $y = x^3$ i $y = 6x - 2$ i narišemo li približne skice tih funkcija, vidjet ćemo da prvi korijen leži između -3 i -2, drugi — između 0 i 1, a treći — između 2 i 3. Odredimo prvi korijen, koji leži između $x_1 = -3$, $x_2 = -2$.

$y = x^3 - 6x + 2; \quad y_1 = -27 + 18 + 2 = -7; \quad y_2 = -8 + 12 + 2 = +6$

$y' = 3x^2 - 6 > 0$ za sve x od -3 do -2, funkcija raste u tom intervalu,

$y'' = 6x < 0$ za sve x od -3 do -2 (konveksa).

Prema našem pravilu polazna je tačka *desna*, kojoj je $y_1 = +6$ (sl. 134,c)

Označimo tu tačku s $A(x_1 = -2, y_1 = +6)$, a drugu s $B(x_2 = -3, y_2 = -7)$

Prema (137): $x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1$

dobijemo $x_3 = -2 - \frac{-3 + 2}{-7 - 6} \cdot 6 = -2 - \frac{-6}{-13} = -2\frac{6}{13} = -2,5$ itd.

Računanje se vrši obično u obliku tablice, koja slijedi i u kojoj je izračunat naš primjer, dok se vrijednosti funkcije y računaju po Hornerovoj shemi. (Vidi str. 52).

n	x_2 y_2	x_n y_n	$\frac{x_2 - x_n}{y_2 - y_n}$	$\delta_n = -\frac{x_2 - x_n}{y_2 - y_n} y_n$	$x_{n+1} = x_n + \delta_n$	y_{n+1} *)	Primjedbe
—	-3 -7	$x_1 = -2$ $y_1 = +6$	-1 -13	$-0,5$	$-2,5$	$+1,38$	*) Računske vrijednosti funkcije y vidi dalje (Hornerova shema).
3	-3 -7	$-2,5$ $+1,38$	$-0,5$ $-8,38$	$-0,08$	$-2,58$	$+0,32$	
4	-3 -7	$-2,58$ $+0,32$	$-0,42$ $-7,32$	$-0,02$	$\underline{-2,60}$	$\underline{+0,02}$	
5	-3 -7	$-2,60$ $+0,02$	$+0,40$ $-7,02$	$-0,001$	$\underline{-2,601}$	$\underline{-0,003}$	

Iz podvučenih vrijednosti za x i y jasno slijedi, da traženi korijen x_0 leži između $-2{,}60$ i $-2{,}601$ dakle

$$x_0 = -2{,}60 \text{ na dvije decimale tačno.}$$

Računanje y po Hornerovoj shemi (vidi str. 52).

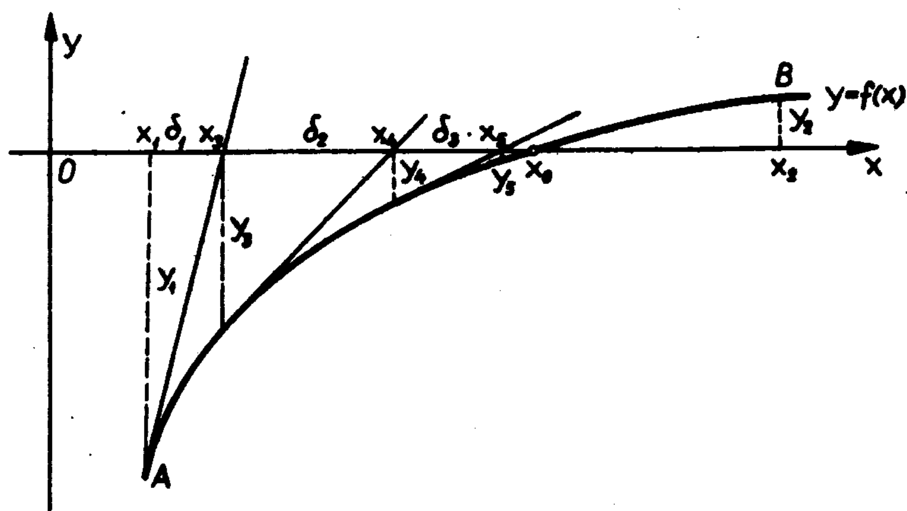
x	a_3	a_2	a_1	a_0	y	y
	$+1$	0	-6	$+2$		
x_3	$-2{,}5$	$-2{,}5$	$+6{,}25$	$-0{,}62$		
		$-2{,}5$	$+0{,}25$	$+1{,}38$	$+1{,}38$	y_3
x_4	$-2{,}58$	$-2{,}58$	$+6{,}66$	$-1{,}68$		
		$-2{,}58$	$+0{,}66$	$+0{,}32$	$+0{,}32$	y_4
x_5	$-2{,}60$	$-2{,}60$	$+6{,}76$	$-1{,}98$		
		$-2{,}60$	$+0{,}76$	$+0{,}02$	$+0{,}02$	y_5
x_6	$-2{,}601$	$-2{,}601$	$+6{,}77$	$-2{,}003$		
		$-2{,}601$	$+0{,}77$	$-0{,}003$	$-0{,}003$	y_6

Odredi na isti način ostala dva korijena zadane jednadžbe.

Metodom sekante mogu se rješavati i transcendentne jednadžbe.

b) Metoda tangente (Newtonova metoda)

Osnovno načelo: luk krivulje nadomjesti se tangentom. Opet se odrede dvije međusobno što bliže vrijednosti x_1 i x_2 za koje funkcija $y = f(x)$, kojoj je desna strana zadana jednadžba $f(x) = 0$, ima vrijednosti protivnog predznaka, tako da je sigurno da se između njih nalazi nultačka pa se iz jedne tačke povuče tangenta na krivulju (vidi sl. 135). Apscisa sjecišta te tangente s osi X daje prvu aproksimaciju x_3 traženog korijena. Postupak se nastavlja, dok se ne dobije vrijednost traženog korijena x_0 na potreban broj decimala tačno.



Sl. 135.

Jednadžba tangente u tački A (x_1, y_1) na krivulju $y = f(x)$ glasi prema (90):

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1), \qquad \text{gdje je } y_1' = y'(x_1).$$

Da odredimo apscisu x_3 sjecišta te tangente s osi X, uvrstimo $y = 0$ pa dobijemo

$$-y_1 = y_1'(x_3 - x_1), \qquad \text{a odatle je}$$

$$-y_1 = y_1' x_3 - y_1' x_1 \qquad \text{ili} \qquad y_1' x_3 = y_1' x_1 - y_1 \,|\, : y_1'$$

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{y_1'} \qquad \text{ili} \qquad x_3 = x_1 + \delta_1, \qquad (138)$$

gdje je $\delta_1 = -\frac{y_1}{y_1'}$ = korekcija vrijednosti x_1 (vidi sl. 135).

Analogno:

$$x_4 = x_3 - \frac{y_3}{y_3'} \qquad \text{ili} \qquad x_4 = x_3 + \delta_3, \qquad (138a)$$

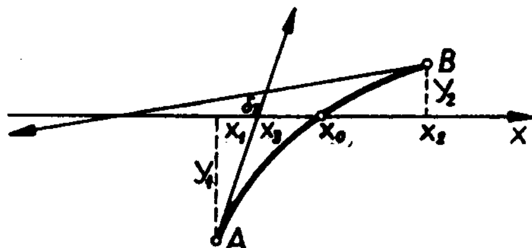
gdje je $\delta_3 = -\frac{y_3}{y_3'}$ = korekcija prve aproksimacije x_3 traženog korijena.

$$x_5 = x_4 - \frac{y_4}{y_4'} \qquad \text{ili} \qquad x_5 = x_4 + \delta_4, \qquad (138b)$$

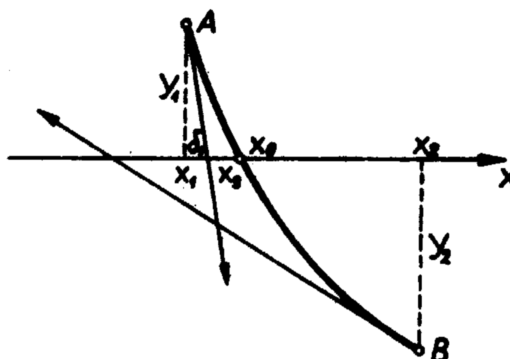
gdje je $\delta_4 = -\frac{y_4}{y_4'}$ = korekcija druge aproksimacije x_4 itd.

Iz slike 136 slijedi:

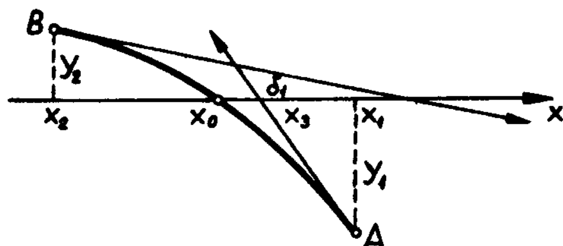
a) $y''<0;\, y_1<0$



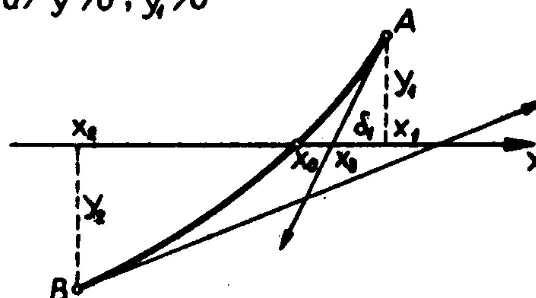
b) $y''>0;\, y_1>0$



c) $y''<0;\, y_1<0$



d) $y''>0;\, y_1>0$



Sl. 136.

Za polaznu tačku $A(x_1, y_1)$ uzima se ona tačka u kojoj se y'' i y_1 podudaraju u predznaku.

(Rješavajući jednadžbe metodom sekante postupamo baš obratno: za polaznu tačku $A(x_1, y_1)$ uzimamo onu tačku, čija je ordinata y_1 protivnog predznaka od y'').

Iz slike 136 vidimo da je u prva dva slučaja početna tačka $A(x_1, y_1)$ lijeva tačka, a u posljednja dva slučaja početna tačka $A(x_1, y_1)$ desna tačka.

Primjeri.

1. Riješi metodom tangente primjer 1, prije riješen metodom sekante (vidi str. 204), pri čemu korijen jednadžbe $x^3 + x - 8 = 0$, koji leži između 1 i 2, odredi na 3 decimale tačno.

$$x^3 + x - 8 = 0$$

$$y = x^3 + x - 8 \qquad x_1 = 1;\ y_1 = -6$$

$$x_2 = 2;\ y_2 = +2$$

$y' = 3x^2 + 1 > 0$ za sve x od $x_1 = 1$ do $x_2 = 2$, funkcija raste.

$y'' = 6x > 0$ za sve x od $x_1 = 1$ do $x_2 = 2$ (konkava).

Prema gore navedenom pravilu polazna tačka je **desna** tačka $A(x_1 = 2,\ y_1 = 2)$, jer je $y_1 = 2 > 0$ i $y'' = 6x > 0$, dok je $B(x_2 = 1,\ y_2 = 6)$ lijeva tačka [vidi d) u slici 136].

Računamo pomoću logaritamskog računala:

$$y_1' = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13.$$

Prema (138) $$x_2 = 2 - \frac{2}{13} = 2 - 0{,}15 = 1{,}85.$$

Uvrštenje $x_2 = 1{,}85$ u y i y' daje:

$$y_2 = 1{,}85^3 + 1{,}85 - 8 = 6{,}33 - 6{,}15 = +0{,}18$$
$$y_2' = 3 \cdot 1{,}85^2 + 1 = 3 \cdot 3{,}42 + 1 = 11{,}26.$$

Prema (138a): $$x_4 = 1{,}85 - \frac{0{,}18}{11{,}26} = 1{,}85 - 0{,}016 = \underline{1{,}834}$$

$$y_4 = 1{,}834^3 + 1{,}834 - 8 = 6{,}170 - 6{,}166 = +\underline{0{,}004}$$
$$y_4' = 3 \cdot 1{,}834^2 + 1 = 3 \cdot 3{,}3636 + 1 = \underline{11{,}091.}$$

Prema (138 b): $$x_5 = 1{,}834 - \frac{0{,}004}{11{,}091} = 1{,}834 - 0{,}0004 = \underline{1{,}8336}$$

$$y_5 = 1{,}8336^3 + 1{,}8336 - 8 = 6{,}1647 - 6{,}1664 = -\underline{0{,}0017.}$$

Budući da smo za y_4 dobili pozitivnu vrijednost, a za y_5 negativnu zaključujemo da traženi korijen zadane jednadžbe leži između $x_4 = 1{,}834$ i $x_5 = 1{,}8336$.

Dakle, traženi je korijen $x_0 = 1{,}834$ na tri decimale tačno.

2. Izračunaj metodom tangente na dvije decimale tačno jedan korijen jednadžbe $x^3 - 3x^2 - 10 = 0$.

Pripadna funkcija glasi: $y = x^3 - 3x^2 - 10$, a $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$.

Sastavimo tablicu vrijednosti funkcije y:

x	1	2	3	4	5
y	− 12	− 14	− 10	+ 6	+ 40

Iz te tablice vidimo, da između $x_1 = 3$ i $x_2 = 4$ mora biti bar jedan korijen zadane jednadžbe, a kako je $y' > 0$ za sve x od 3 do 4 leži u tom intervalu samo jedan korijen, pri čemu funkcija u tom intervalu raste.

Pošto je $y'' > 0$ za sve x od 3 do 4 (konkava) treba uzeti za polaznu tačku $A(x_1 = 4,\ y_1 = 6)$ **desnu** tačku, jer je za tu tačku $y_1 = +6$ [vidi d) na slici 136].

Računanje provedimo u obliku tablice 1, pri čemu vrijednosti y i y' računamo po Hornerovoj shemi (tablice 2 i 3).

Tablica 1.

n	x_n	y_n	y_n'	$\delta_n = -\frac{y_n}{y_n'}$	$x_{n+1} = x_n + \delta_n$	y_{n+1}
1	4	6	24	− 0,25	$x_3 = 3{,}75$	$y_3 = +0{,}43$
3	3,75	0,43	20,20	− 0,021	$x_4 = \underline{3{,}73}$	$y_4 = +\underline{0{,}20}$
4	3,73	0,20	19,40	− 0,010	$x_5 = \underline{3{,}72}$	$y_5 = -\underline{0{,}03}$

Obzirom na vrijednosti dobivene za x_4 i x_5, a također za y_4 i y_5, zaključujemo da je korijen zadane jednadžbe $x_0 = 3{,}72$ na 2 decimale tačno.

Računanje y po Hornerovoj shemi

Tablica 2.

x	a_3	a_2	a_1	a_0	y	y
	1	−3	0	−10		
x_3	3,75	3,75	2,81	10,43		
		0,75	2,81	0,43	+ 0,43	y_3
x_4	3,73	3,73	2,72	10,20		
		0,73	2,72	0,20	+ 0,20	y_4
x_5	3,72	3,72	2,68	9,97		
		0,72	2,68	− 0,03	− 0,03	y_5

Računanje y' po Hornerovoj shemi

Tablica 3.

x	a_2	a_1	a_0	y'	y'
	3	−6	0		
x_3	3,75	11,25	20,20		
		5,25	20,20	20,20	y_3'
x_4	3,73	11,19	19,40		
		5,19	19,40	19,40	y_4'

Vidimo, da je metoda tangente mnogo podesnija za računanje od metode sekante: brže vodi cilju. Metodom tangente možemo rješavati i transcendentne jednadžbe. Navedimo primjer.

3. U ležeći kotao valjkastog oblika čija zapremina iznosi 1500 l, ulito je 900 l vode. Odredi visinu h vode u kotlu.

Prema slici 137:

$$h = r + r\cos\frac{x}{2}$$

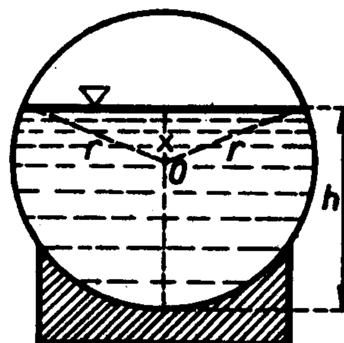
ili

$$h = r\left(1 + \cos\frac{x}{2}\right) \qquad \text{(a)}$$

$$x = ?$$

Zapremina čitava kotla iznosi:

$\pi r^2 L = 1500\,\text{l}$, gdje je L — duljina kotla.



Sl. 137.

Zapremina dijela kotla slobodnog od vode:

$$\frac{1}{2}\, r^2 x L - \frac{1}{2}\, 2r \sin\frac{x}{2} \cdot r \cos\frac{x}{2} \cdot L = \frac{1}{2}\, r^2 x L - \frac{1}{2}\, r^2 L \sin x = \frac{1}{2}\, r^2 L\,(x - \sin x).$$

Imamo razmjer:

$$\frac{\pi r^2 L}{\frac{1}{2}\, r^2 L\,(x - \sin x)} = \frac{1500}{600}$$

ili

$$\frac{2\pi}{x - \sin x} = \frac{5}{2}.$$

Odatle:

$$x - \sin x = \frac{4}{5}\pi$$

ili

$$x - \sin x - \frac{4}{5}\pi = 0,$$ a to je transcendentna jednadžba.

Pripadna funkcija: $y = x - \sin x - \frac{4}{5}\pi$

Računamo: $y' = 1 - \cos x$

$y'' = \sin x$.

Za $x_1 = \frac{\pi}{2}$: $y_1 = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} - \frac{4}{5}\pi = 1{,}57 - 1 - 2{,}51 = -1{,}94 < 0$.

Za $x_2 = \pi$: $y_2 = \pi - \sin\pi - \frac{4}{5}\pi = \pi - \frac{4}{5}\pi = \frac{\pi}{5} > 0$.

Između $\frac{\pi}{2}$ i π leži traženi korijen jednadžbe i to samo jedan, jer je $y' = 1 - \cos x > 0$ za sve x od $\frac{\pi}{2}$ do π.

Kako je $y'' = \sin x > 0$ za sve x od $\frac{\pi}{2}$ do π (II kvadrant), uzimamo prema našem pravilu za polaznu tačku desnu tačku $A\left(x_1 = \pi,\ y_1 = \frac{\pi}{5}\right)$ [vidi d) na sl. 136].

Računamo:

n	x_n	y_n	y_n'	$\delta_n = -\frac{y_n}{y_n'}$	$x_{n+1} = x_n + \delta_n$	y_{n+1}
1	π	$\frac{\pi}{5}$	2	$-\frac{\pi}{10}$	$x_3 = 0{,}9\pi = 2{,}82743$ (162°)	$y_3 = 0{,}00514$
3	2,82743 (162°)	0,00514	1,95106	$-0{,}00263$	$x_4 = 2{,}82480$ (161°51')	$y_4 = 0{,}00004$
4	2,82480 (161°51')	0,00004				

Kako smo za y_4 dobili malu vrijednost (0,00004), možemo uzeti da je

$$x = 2{,}82480 = \text{arc } 161°51',$$

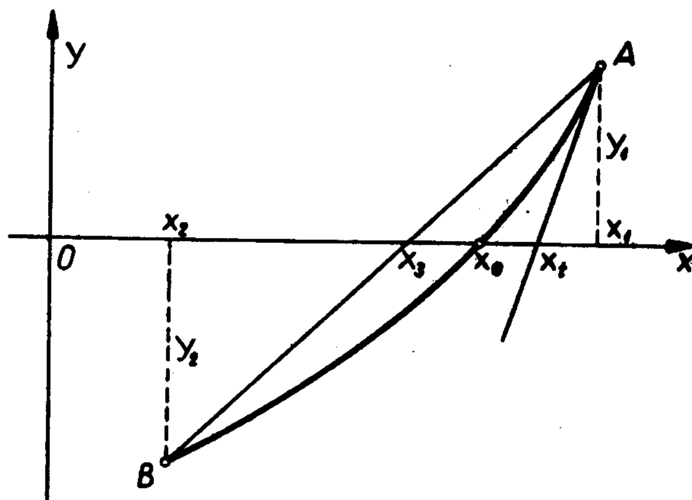
a prema (a):

visina vode $h = r\,(1 + \cos 80°55{,}5') = 1{,}1577\, r$.

$$h = 1{,}1577\, r.$$

c) Kombinirana metoda

Iz slike 138 vidimo da je $x_s < x_0 < x_t$, gdje su x_s — apscisa sjecišta sekante AB s osi X, a x_t — apscisa sjecišta tangente u A s osi X. Odatle slijedi mogućnost, da primjenjujući istodobno i opetovano obje metode sve više i više stežemo interval $[x_s, x_t]$ u kojem leži traženi korijen x_0 jednadžbe, pa ga možemo odrediti po volji tačno.



Sl. 138.

Riješimo primjer 2. tom kombiniranom metodom, tj. odredimo korijen jednadžbe $x^3 - 3x^2 - 10 = 0$, koji leži između 3 i 4, i to na 4 decimale tačno.

$$y = x^3 - 3x^2 - 10$$
$$y' = 3x^2 - 6x.$$

Prema gore postavljenim pravilima tačka A ($x_1 = 4, y_1 = 6$) je polazna tačka za metodu tangente, za polaznu tačku metode sekante uzet će se ista tačka A. U daljnjem računanju uzimat će se za polaznu tačku metode sekante uvijek tačka određena metodom tangente, tako da pri računanju bilo koje aproksimacije korijena polazne su t a č k e i s t e za obje metode. Računanje se vrši tako, da se određuje samo toliko znamenaka svake aproksimacije korijena koliko je to potrebno za određivanje z a j e d n i č k i h z n a m e n a k a, pri čemu se donja granica uvijek zaokružuje na manje, a gornja na više.

1. aproksimacija:

Metoda tangente $\quad x_1 = 4,\ y_1 = 6,\ y_1' = 24.$

Prema (138): $\quad x_3 = 4 - 0{,}25 = 3{,}75 \doteq 3{,}8.$

Metoda sekante: $\quad x_1 = 4,\ y_1 = 6,\ x_2 = 3,\ y_2 = -10.$

Prema (137): $\quad x_4 = 4 - 0{,}375 = 3{,}625 = 3{,}6.$

2. aproksimacija:

Metoda tangente: $\quad x_3 = 3{,}8;\ y_3 = 1{,}552;\ y_3' = +20{,}52$

$\quad x_5 = 3{,}8 - 0{,}076 = 3{,}724 \doteq 3{,}73$

Metoda sekante: $\quad x_3 = 3{,}8;\ y_3 = 1{,}552;\ x_4 = 3{,}6;\ y_4 = -2{,}224$

$\quad x_6 = 3{,}8 - 0{,}082 = 1{,}718 \doteq 3{,}71.$

3. aproksimacija

Metoda tangente: $x_6 = 3,73;\ y_6 = +\ 0,1564;\ y_6' = 19,26$

$x_7 = 3,73 - 0,00813 = \underline{3,72187}.$

Metoda sekante: $x_6 = 3,73;\ y_6 = 0,1564;\ x_4 = 3,71;\ y_4 = -\ 0,2275$

$x_8 = 3,73 - 0,00815 = \underline{3,72185}.$

Iz uspoređenja vrijednosti dobivenih za x_7 i x_8 slijedi da je traženi korijen $x_0 = 3,7219$ na 4 decimale tačno.

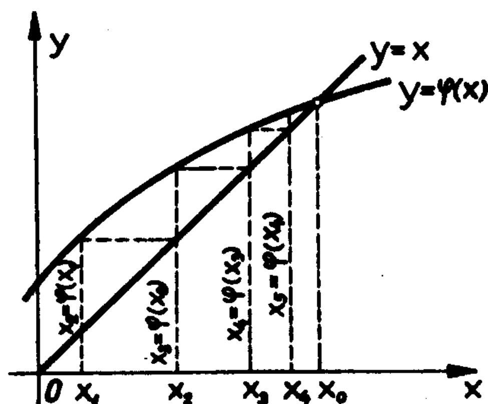
d) Metoda iteracije (opetovanog uvrštavanja)

Da se ta metoda približnog rješavanja jednadžbi može primijeniti, treba zadanu jednadžbu $f(x) = 0$ prikazati u obliku $x = \varphi(x)$, što je često moguće (vidi sl. 139). Dalje mora funkcija $\varphi(x)$ imati u okolišu tražene nultačke derivaciju $|\varphi'(x)| = |\text{tg}\,\alpha| < 1$, drugim riječima tangenta na krivulju $y = \varphi(x)$ mora zatvarati s osi $+X$ kut manji od 45^0.

Ako je $|\varphi'(x)| > 1$, uzimamo inverznu funkciju $x = \psi(x)$, za koju je derivacija $|\psi'(x)| < 1$, jer je prema (109): $\psi'(x)\cdot\varphi'(x) = 1$. Ako je x_1 približna vrijednost korijena x_0 zadane jednadžbe $x = \varphi(x)$, tada su, ako je gornjim uvjetima zadovoljeno,

$$x_2 = \varphi(x_1)$$
$$x_3 = \varphi(x_2)$$
$$x_4 = \varphi(x_3) \text{ itd.}$$

uvijek bolje aproksimacije traženog korijena x_0, kako se to vidi iz sl. 139.



Sl. 139.

Računamo dakle aproksimaciju traženog korijena x_0 prema formuli

$$x_0 = x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (139)$$

uzimajući za n redom vrijednosti 1, 2, 3, . . .

Primjer. Izračunaj na 4 decimale tačno prvi pozitivni korijen jednadžbe $x - \text{tg}\,x = 0$ ili $x = \text{tg}\,x$.

Prema gore navedenom je $\varphi(x) = \text{tg}\,x$, a kako je $\varphi'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 1$, metodu iteracije ne možemo primijeniti.

Prelazimo na inverznu funkciju:

$$x = \text{Arc tg}\,x$$

Sada je $\varphi(x) = \text{Arc tg}\,x$, a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} < 1 \qquad \text{za sve } x \neq 0.$$

Vidimo da metoda iteracije vrijedi za taj drugi oblik zadane jednadžbe. Grafovi funkcija $y = x$ i $y = \text{Arc tg}\, x$, sijeku se između $x = 4{,}4$ i $x = 4{,}5$. U tom intervalu leži tačka u kojoj pravac $y = x$ siječe granu funkcije $y = \text{Arc tg}\, x$, koja se nalazi između pravaca $y = \frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{3\pi}{2}$ (vidi sl. 68).

Uzevši $x_1 = 4{,}4$ za polaznu tačku, prelazimo na rješavanje zadane jednadžbe.

Računamo prema (139):

$$x_0 \doteq x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

x_n	$\varphi(x_n) = \text{Arc tg}\, x$		$x_0 \doteq x_{n+1}$
	u kutnoj mjeri	u lučnoj mjeri	
$x_1 = 4{,}4$	257°11'44"	4,48890	4,48890
$x_2 = 4{,}48890$	257°26'28"	4,49319	4,49319
$x_3 = 4{,}49319$	257°27'11"	4,49339	4,49339
$x_4 = 4{,}49339$	257°27'13"	4,49340	4,49340
$x_5 = \underline{4{,}49340}$	257°27'13"	4,49340	$\underline{4{,}49340}$

U vrijednostima dobivenim za x_5 i x_4 prve 4 decimale su zajedničke i sigurne dakle

$$\underline{x_0 = 4{,}4934}$$

je traženi korijen jednadžbe $x = \text{tg}\, x$ izračunat na 4 decimale tačno.

Primjeri.

1. Polazeći od grafičkim putem određene početne vrijednosti realnog korijena jednadžbe $x^3 - x + 1 = 0$ izračunaj ga s tačnošću do 0,01 metodom sekante, a korijen jednadžbe $x^3 - 2x - 5 = 0$ metodom tangente.

[— 1,325], [2,09]

2. Metodom iteracije odredi s tačnošću do 0,0001 korijene jednadžbe $x \cdot \text{th}\, x = 1$

[± 1,997]

§ 20.

BESKONAČNI REDOVI

1. POJAM KONVERGENCIJE I DIVERGENCIJE REDA

U § 2. govoreći o sljedovima rekli smo, da je beskonačan slijed niz brojeva koji nisu međusobno vezani nikakvim računskim operacijama, jer je veza između članova slijeda nutarnja, a sadržana je u n-tom ili općem članu slijeda. Napišemo li opet po nekom zakonu beskonačni niz brojeva, ali spojimo li ih sada predznacima plus ili minus, dobit ćemo **beskonačni red**. To je dakle suma koja sadrži beskonačno mnogo pozitivnih ili negativnih članova napisanih po nekom zakonu; to nije obična konačna suma, već suma u kojoj iza svakog člana dolazi još jedan član dakle dolazi ih beskonačno mnogo.

Navedimo primjer: $\frac{1}{3} = 0{,}333\cdots = 0{,}\dot{3} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + + 0{,}0003 + \cdots$

$\frac{1}{3}$ prikazali smo u obliku beskonačnog reda, za koji se kaže da je konvergentan i da mu je „suma" $\frac{1}{3}$.

Nastaje pitanje, koji red zovemo konvergentnim redom i što se općenito razumije pod „sumom" beskonačnog konvergentnog reda.

Na to pitanje odgovorimo na primjerima jednostavnih beskonačnih redova.

Neka je zadan beskonačan red:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Da riješimo pitanje predočuje li taj beskonačni red neki određeni konačni broj, a ako predočuje koliki je taj broj, ići ćemo najjednostavnijim i naravnim putem: počnimo zbrajati pojedine članove reda.

Suma od prvog člana reda: $s_1 = 1.$

Suma od prva dva člana reda $s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}.$

Suma od prva tri člana reda $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}.$

Suma od prva četiri člana reda: $s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$

Suma od prvih pet članova reda: $s_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =$

$$= 1\frac{7}{8} + \frac{1}{16} = 1\frac{15}{16}.$$

Suma od prvih šest članova reda: $s_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$

$$= 1\frac{15}{16} + \frac{1}{32} = 1\frac{31}{32}.$$

. . . .

. . . .

Takvih suma ima beskonačno mnogo, njih možemo uvijek izračunati jer sadrže samo konačni broj članova, a zovu se parcijalne tj. djelomične sume članova zadanog reda. Prepišemo li te parcijalne sume onim redom kojim smo ih izračunali

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4},\ 1\frac{7}{8},\ 1\frac{15}{16},\ 1\frac{31}{32},\ldots,$$

dobit ćemo beskonačni slijed i to slijed parcijalnih suma zadanog reda.

Već na prvi pogled vidimo, da slijed parcijalnih suma zadanog reda konvergira i ima za limes konačni i određeni broj 2, a možemo to lako i dokazati, ako taj slijed napišemo u obliku:

$$1,\ 1 + \frac{1}{2},\ 1 + \frac{3}{2^2},\ 1 + \frac{7}{2^3},\ldots\ldots\ldots\ldots,\ 1 + \frac{2^n - 1}{2^n},\ldots$$

i izračunamo limes toga slijeda, tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2^n - 1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 2 - 0 = 2.$$

Na temelju toga što slijed parcijalnih suma konvergira i što mu je limes konačni i određeni broj 2, zaključujemo, da zadani red konvergira i ima za sumu broj 2, tj.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2.$$

(Vidi dalje primjer na str. 221.)

Sad je jasno, koji red zovemo konvergentnim i što razumijemo pod sumom konvergentna reda:

Beskonačni red konvergira, ako njegov slijed parcijalnih suma konvergira i ima za limes konačan i određen broj.

Suma konvergentna reda je limes slijeda parcijalnih suma toga reda.

Vidimo da se konvergencija beskonačna reda svodi na konvergenciju slijeda parcijalnih suma njegovih članova.

Uzmimo sada drugi red:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots$$

i opet počnemo računati parcijalne sume članova toga reda.

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 + 2 = 3$$
$$s_3 = 1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 6$$
$$s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 6 + 4 = 10$$
$$s_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 10 + 5 = 15$$
$$s_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 15 + 6 = 21$$
$$s_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 21 + 7 = 28$$

. . . .

. . . .

Te parcijalne sume članova zadanog reda čine beskonačni slijed parcijalnih suma:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \ldots$$

Vidimo da taj slijed parcijalnih suma divergira, jer njegovi članovi teže u beskonačnost. Na temelju toga zaključujemo, da zadani red divergira u užem smislu.

Dakle:

Beskonačni red divergira u užem smislu, ako njegov slijed parcijalnih suma teži u beskonačnost.

Uzmimo konačno još jedan red:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

i opet izračunajmo nekoliko parcijalnih suma toga reda:

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 - 1 = 0$$
$$s_3 = 1 - 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$s_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$s_5 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Te sume čine beskonačni slijed parcijalnih suma:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

Vidimo da članovi slijeda osciliraju (između 1 i 0) pa zaključujemo da zadani red divergira u širem smislu.

Dakle:

Beskonačni red divergira u širem smislu, ako članovi slijeda njegovih parcijalnih suma osciliraju između konačnih ili beskonačnih međa.

Vidimo opet da se i divergencija beskonačna reda svodi na divergenciju slijeda parcijalnih suma njegovih članova.

Općenito može se gore navedeno prikazati ovako:

Neka je zadan beskonačan red:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots\cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

Izračunajmo parcijalne sume članova toga reda:

$$s_1 = u_1$$
$$s_2 = u_1 + u_2$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Te parcijalne sume čine beskonačni slijed parcijalnih suma:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots, s_n, \ldots$$

Potražimo limes slijeda parcijalnih suma, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Znamo već da mogu biti 3 slučaja:

1) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s =$ konačan i određen broj, zadani red konvergira i suma mu je s, tj.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots = s.$$

2) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, zadani red divergira u užem smislu.

3) Ako članovi slijeda parcijalnih suma osciliraju, zadani red divergira u širem smislu.

Navedimo primjer.

Konvergira li red $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$?

Kako vidimo, red je zadan simbolički: veliko grčko slovo sigma (Σ) znači „sumiraj", a s oznakom $n=2$ i ∞ znači „sumiraj mijenjajući n od 2 do beskonačno", tj. uvrštavaj u $\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ redom $n=2$, $n=3$, $n=4, \ldots, n=n$, $n=n+1$, itd.

Dobijemo:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots$$

Prelazimo na računanje parcijalnih suma zadanog reda. Kako se operacije nad slijedovima svode na operacije nad općim ili n-tim članom slijeda, računamo samo n-ti član slijeda parcijalnih suma, tj.

$$s_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Vidimo da se ukidaju članovi $-\frac{1}{2}$ i $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ i $+\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$ i $+\frac{1}{4}$, ..., $-\frac{1}{n-1}$ i $\frac{1}{n-1}$ i konačno $-\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n}$, pa ostaje samo prvi član $\frac{1}{1}=1$ i posljednji $-\frac{1}{n+1}$. Imamo dakle:

$$s_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Prelazimo na limes pustivši da $n \to \infty$.

Prema poznatim pravilima o operacijama s limesima (vidi § 2,5) imamo:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1=\text{konačan određen broj.}$$

Zaključujemo: zadani red konvergira i suma mu je 1, tj.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1.$$

Kao drugi primjer navedimo beskonačni geometrijski red.

2. BESKONAČNI GEOMETRIJSKI REDOVI

To je posebna najjednostavnija vrsta redova, u kojim je omjer svakog člana reda i člana pred njim stalan; taj omjer zove se **kvocijent reda**. Drugim riječima, svaki slijedeći član reda dobije se iz predašnjeg tako, da se taj predašnji član pomnoži s tim stalnim kvocijentom reda. Na primjer već poznati nam red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots$$

jest geometrijski red, kojemu je kvocijent $\frac{1}{2}$, jer je

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1\right), \quad \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \ldots$$

ili također

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \ldots$$

Općenito pišemo geometrijski red u obliku:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n + \cdots$$

gdje je x kvocijent reda.

Primijetimo, da svaki geometrijski red možemo svesti na taj oblik. Na primjer

$$5 - \frac{5}{3} + \frac{5}{9} - \frac{5}{27} + \cdots = 5\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots\right)$$

Kvocijent reda je $x = -\frac{1}{3}$.

Napišemo s_n, tj. n-ti član slijeda parcijalnih suma geometrijskog reda:

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}.$$

(Pazi: posljednji član u s_n je x^{n-1}, jer je s_n parcijalna suma od n članova reda!). To je **konačni** geometrijski red, kojemu je prvi član $a_1 = 1$, kvocijent $q = x$, a broj članova je n. Dakle prema poznatoj formuli za sumu članova konačnog geometrijskog reda $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (vidi Repet. element. matematike) dobije n-ti član s_n slijeda parcijalnih suma beskonačnog geometrijskog reda oblik:

$$s_n = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

ili

$$s_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

ili konačno:

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} \cdot x^n .$$

Sada odredimo limes slijeda parcijalnih suma, pustivši da $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x} \cdot \lim_{n\to\infty} x^n .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

jer tražeći limes mijenjamo samo n, dok je x neki čvrsti zadani broj, pa je $\frac{1}{1-x}$ konstanta s obzirom na n. Imamo dakle:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} \cdot \lim_{n\to\infty} x^n . \qquad \text{(a)}$$

Vrijednost $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ zavisi od veličine i predznaka zadanog broja x. Prema tome uzmemo posebno:

1) $|x| < 1$, tj. x neka leži između -1 i $+1$, npr. $x = \frac{1}{2}$ ili $-\frac{1}{3}$ itd.

Kako je za $|x| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, imamo prema (a):

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x} = \text{konačan određen broj.}$$

Vidimo, da za $|x| < 1$ slijed parcijalnih suma geometrijskog reda ima konstantan određen limes $\frac{1}{1-x}$, dakle

za $|x| < 1$ geometrijski red konvergira i ima za sumu

$$s = \frac{1}{1-x}. \qquad (140)$$

Primjeri.

1. Pri postavljanju pojma konvergentnog reda uzeli smo beskonačni red:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

pa smo zaključili, da taj red konvergira i da mu je suma 2. Sada možemo mnogo

jednostavnije dokazati konvergenciju toga reda. Zadani red konvergira, jer je to geometrijski red kvocijenta $x=\frac{1}{2}<1$, te mu je suma $s=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, tj.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2.$$

2. Konvergira li red

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots?$$

Odgovor: Da, jer to geometrijski red kvocijenta $x=-\frac{1}{3}$, pri čemu je $|x|=\frac{1}{3}<1$, te mu je suma

$$s=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}.$$

2) Neka je sada $x>1$, npr. $x=2$; 3; 4,5 itd.

Za $x>1$ $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$, pa je sada prema (a)

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty.$$

Slijed parcijalnih suma geometrijskog reda teži u beskonačnost, dakle za $x>1$ geometrijski red divergira u užem smislu. Npr. geometrijski red

$$1+2+4+8+\cdots$$

divergira u užem smislu, jer je $x=2>1$.

3) Neka je $x<-1$, npr. $x=-2$, -4, $-7{,}3$ itd.

Sada je $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}+\infty & \text{za } n \text{ tak (paran)}\\ -\infty & \text{za } n \text{ lih (neparan).}\end{cases}$

Npr. za $n=-2$ dobijemo:

$(-2)^1=-2$, $(-2)^2=+4$; $(-2)^3=-8$; $(-2)^4=+16$, $(-2)^5=-32$ itd.

Uzevši još u obzir da je $x<-1$, dobijemo prema (a):

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\begin{cases}-\infty & \text{za } n \text{ tak}\\ +\infty & \text{za } n \text{ lih,}\end{cases}$$

jer je faktor $-\frac{1}{1-x}<0$, za $x<-1$.

Vidimo da članovi slijeda parcijalnih suma geometrijskog reda osciliraju dakle

za $x<-1$ geometrijski red divergira u širem smislu.

Npr. geometrijski red $1-3+9-27+\cdots$ divergira u širem smislu, jer je $x=-3<-1$.

4) Neka je $x=1$. Uvrštenje $x=1$ u geometrijski red

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$

daje:

$$1+1+1+1+\cdots$$

Računajmo parcijalne sume:

$s_1=1$
$s_2=2$
$s_3=3$
$s_4=4$
....
$s_n=n$
.... $\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty.$
....

Vidimo da slijed parcijalnih suma teži u beskonačnost, dakle **za $x=1$ gometrijski red divergira u užem smislu.**

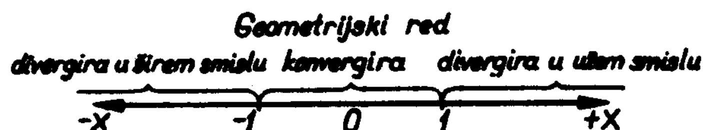
5) Neka je konačno $x=-1$. Uvrštenje $x=-1$ u geometrijski red daje:

$$1-1+1-1+1-1+-\cdots$$

$s_1=1$
$s_2=0$
$s_3=1$
$s_4=0$
....
....

Parcijalne sume toga reda, koji smo uostalom već prije imali, osciliraju, dakle **za $x=-1$ geometrijski red divergira u širem smislu.**

Zaključak: **geometrijski red konvergira samo za $|x|<1$, tj. za sve x između -1 i $+1$ isključivši granice, te mu je suma $s=\frac{1}{1-x}$, dok za sve ostale pozitivne x geometrijski red divergira u užem smislu, a za ostale negativne x divergira u širem smislu.**



Sl. 140.

Sl. 140 zorno prikazuje za koje vrijednosti x geometrijski red konvergira, a za koje divergira u užem, odnosno u širem smislu.

3. NUŽDAN UVJET ZA KONVERGENCIJU REDOVA UOPĆE

Da bilo koji beskonačni red konvergira nužno je, ali nije dovoljno, da članovi reda po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže nuli, kad idemo u redu sve dalje.

To znači: ako članovi reda po apsolutnoj vrijednosti rastu, ne može biti govora o konvergenciji reda, a ako padaju red može ali ne mora da konvergira.

Kao primjer navedimo harmonički red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

Vidimo da članovi harmoničkog reda padaju i teže nuli, jer je $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, ali, kako ćemo kasnije vidjeti, harmonički red ipak divergira.

4. DOVOLJAN UVJET ZA KONVERGENCIJU REDOVA

Da red konvergira, dovoljno je (i nužno), da svaki dovoljno daleki isječak reda, koji sadrži kolikogod članova, možemo načiniti po apsolutnoj vrijednosti po volji malenim.

To znači, da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+r} + \cdots$$

sigurno konvergira, ako dovoljno daleki isječak reda npr.

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+r}|$$

gdje je n dovoljno velik, a broj članova r bilo koji, možemo po apsolutnoj vrijednosti načiniti po volji malenim tj. ako apsolutna vrijednost toga isječka reda teži nuli, kad broj njegovih članova r teži u beskonačnost dakle, ako je

$$\lim_{r \to \infty} |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+r}| = 0.$$

Uzmemo li, da je $r = 1$ tj. uzmemo li dovoljno daleki isječak reda samo od jednog člana, dobit ćemo:

$$\lim_{n \to \infty} |u_{n+1}| = 0.$$

To je nama već poznati nužni uvjet za konvergenciju reda, da članovi reda teže po apsolutnoj vrijednosti nuli. Taj uvjet nije dovoljan

jer dovoljno daleki isječak reda mora sadržavati *kolikogod* **članova** a ne samo jedan član, kako smo uzeli.

Sada možemo lako dakazati da harmonički red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots$$

divergira, jer nije ispunjen dovoljni uvjet konvergencije reda.

U tu svrhu uzmemo ma kako daleki isječak reda, koji počinje s članom $\frac{1}{n+1}$ i uzmemo da ima n članova:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}.$$

Ako uzmemo da je svaki član toga isječka jednak $\frac{1}{2n}$, dobit ćemo zbroj koji je manji od vrijednosti isječka reda, jer je svaki član isječka osim posljednjeg veći od $\frac{1}{2n}$ (članovi isječka imaju manje nazivnike!).

Imamo dakle uzevši još u obzir, da uzeti isječak harmoničkog reda ima n članova, nejednakost:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{3}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n}$$

ili

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Vidimo da je takav isječak harmoničkog reda uvijek veći od $\frac{1}{2}$ ma kako dalek bio tj. ma kolik bio n, pa ga ne možemo načiniti po volji malenim. Dovoljni uvjet nije dakle ispunjen — *harmonički red divergira, iako njegovi članovi po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže nuli.*

5. OSTATAK KONVERGENTNOG REDA

Neka je zadan beskonačni konvergentni red, kome je suma s, tj.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = s.$$

Pretpostavimo li da tražimo sumu s toga konvergentnog reda, koja nam nije poznata i da ne znamo načina za njeno tačno određivanje, što je slučaj kod većine redova, tada nam ne ostaje ništa drugo nego da

sumu s reda aproksimiramo uz potrebnu tačnost parcijalnom sumom s_n prvih n članova reda tj. moramo uzeti $s \doteq s_n$. Kod toga zanemarujemo sve ostale članove reda počevši od u_{n+1}, kojih ima beskonačno mnogo i čija suma čini pogrešku uzete aproksimacije, a zove se **ostatak** R_n reda:

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

Imamo dakle:
$$s_n + R_n = s,$$

a odatle je
$$R_n = s - s_n$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = s - \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ (vidi definiciju sume konvergentnog reda), dobijemo:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

To znači:

Ako sumu s konvergentnog reda aproksimiramo pomoću parcijalne sume s_n toga reda, pogreška aproksimacije ili ostatak reda R_n teži nuli kad $n \to \infty$, tj. kad sumu reda aproksimiramo parcijalnom sumom što većeg broja prvih članova reda.

Prema tome: **sumu s svakog konvergentnog reda možemo aproksimirati po volji tačno pomoću parcijalne sume s_n prvih n članova reda, ako broj članova n u toj parcijalnoj sumi uzmemo dovoljno velik.**

Kao primjer približnog određivanja sume konvergentnog reda navedimo izračunavanje vrijednosti broja e na pet decimala tačno.

Kako ćemo kasnije vidjeti (isti §, t. 9), broj e možemo prikazati u obliku beskonačnog reda

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Da bude i peta decimala broja e zajamčena:

1) računat ćemo svaki član reda na $5 + 2 = 7$ decimala tačno.

2) budući da u konvergentnom redu članovi reda po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže nuli, računat ćemo toliko članova reda, dok ne dođemo do člana, kojemu su sve znamenke koje računamo nule. Jasno je, da ćemo tada računanje članova reda prekinuti i prijeći na zbrajanje izračunatih članova. Ovaj način je pouzdan kod oštro konvergentnih redova, ali može zakazati kod slabo konvergentnih. Treba u tom slučaju provesti drugim načinom procjenu ostatka.

Računanje daje:

I.	član	1.000 0000
II.	član	1.000 0000
III.	$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$	0,500 0000
IV.	$\frac{1}{3!}=\frac{1}{2}:3$	0,166 6667
V.	$\frac{1}{4!}=\frac{1}{3!}:4$	0,041 6667
VI.	$\frac{1}{5!}=\frac{1}{4!}:5$	0,008 3333
VII.	$\frac{1}{6!}=\frac{1}{5!}:6$	0,001 3889
VIII.	$\frac{1}{7!}=\frac{1}{6!}:7$	0,000 1984
IX.	$\frac{1}{8!}=\frac{1}{7!}:8$	0,000 0248
X.	$\frac{1}{9!}=\frac{1}{8!}:9$	0,000 0028
XI.	$\frac{1}{10!}=\frac{1}{9!}:10$	0,000 0003
XII.	$\frac{1}{11!}=\frac{1}{10!}:11$	0,000 0000
		2,718 2819

Odbacivši dvije posljednje decimale, dobijemo $e = 2{,}71828$ na 5 decimala tačno.

6. KATEGORIJE REDOVA

Gore navedeni nužni i dovoljni uvjet za konvergenciju redova previše je općenit, a da bi se dao jednostavno primijeniti za određivanje konvergencije odnosno divergencije pojedinih redova. S toga se razloga redovi dijele na tri kategorije:

1) redovi s pozitivnim članovima,

2) alternirani (izmjenični) redovi i

3) redovi s pozitivnim i negativnim članovima poredanim bilo kako, pa za svaku od tih kategorija postavlja se jednostavni kriteriji za konvergenciju odnosno divergenciju tih redova.

a) Redovi s pozitivnim članovima

Budući da su svi članovi redova ove kategorije pozitivni, slijed njihovih parcijalnih suma uvijek je monotono rastući slijed koji, kako znamo, ili konvergira prema konačnom određenom broju ili teži u beskonačnost, dok je oscilacija nemoguća. Prema tome redovi s pozitivnim članovima ili konvergiraju ili divergiraju u užem smislu, a divergencija u širem smislu je isključena.

Za redove s pozitivnim članovima vrijedi:

1) Teorem o uspoređivanju redova

Ako su članovi zadanog reda s pozitivnim članovima čiju konvergenciju ispitujemo počevši od nekog člana uvijek m a n j i od pripadnih članova nekog drugog reda za koji znamo da k o n v e r g i r a, tada i zadani red konvergira; ako su članovi zadanog reda v e ć i od pripadnih članova nekog drugog reda za koji znamo da d i v e r g i r a, tada i zadani red divergira.

Prvi dio teorema posve je jasan:

ako red s kojim uspoređujemo zadani red konvergira, a to znači da njegov slijed parcijalnih suma teži konačnom određenom broju, mora konvergirati i zadani red jer ima manje članove, dakle i manje parcijalne sume, pa njegov slijed parcijalnih suma ne može težiti u beskonačnost, već će također težiti nekom konačnom određenom broju.

Isto tako jasan je i drugi dio teorema:

ako red s kojim uspoređujemo zadani red divergira, tj. njegov slijed parcijalnih suma teži u beskonačnost, pogotovo će težiti u beskonačnost slijed parcijalnih suma zadanog reda, jer taj red ima veće članove, dakle i veće parcijalne sume.

Primjeri.

1. Konvergira li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$?

Da dokažemo konvergenciju toga reda, usporedimo ga s redom

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \\ + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \cdots$$

za koji smo već prije dokazali da konvergira (vidi str. 219).

Usporedimo n-te članove obaju redova. Za prvi red je $u_n = \frac{1}{n^2}$, a za drugi

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n+1}{(n-1)\,n} = \frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{1}{n^2-n}.$$

Kako je $\qquad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2-n}$, jer je $n^2 - n < n^2$,

zaključujemo na temelju teorema o uspoređivanju redova, da z a d a n i r e d $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ također k o n v e r g i r a.

2. Konvergira li red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + \cdots ?$$

Usporedimo taj red, kojemu je n-ti član $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{n^{2/3}}$ s harmoničkim redom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdot + \frac{1}{n} + \cdots$$

za koji znamo da divergira (vidi str. 225) i komu je $u_n = \frac{1}{n}$.

Kako je

$$\frac{1}{n^{2/3}} > \frac{1}{n}$$

zaključujemo na temelju teorema o uspoređivanju redova, da zadani red d i v e r g i r a.

2) D'Alembertov kriterij

Ako u redu s pozitivnim članovima omjer jednog člana reda i člana pred njim postane i ostane manji od broja k koji leži između 0 i 1, red konvergira, a ako taj omjer postane napokon veći od 1 ili jednak 1 red divergira.

To znači: ako za zadani red pozitivnih članova

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

načinimo omjere

$$\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}, \ldots\ldots, \frac{u_{n+1}}{u_n}, \ldots$$

pa ako vrijednosti tih omjera počevši od prvoga ili bilo kojeg daljnjega postanu i ostanu manje od pozitivnog broja k, koji je manji od 1, red konvergira, a ako ti omjeri postanu i ostanu veći ili jednaki jedinici, red divergira.

Primjedba: Bilo bi netačno da smo navodeći d' Alembertov kriterij rekli, da vrijednost navedenih omjera mora postati i ostati manja od 1, već treba navesti „manja od k, gdje je $0 < k < 1$", jer se pod k razumijeva neki pozitivni pravi razlomak, koji je m a n j i o d 1 z a n e k u k o n a č n u v e l i č i n u. Tako npr. za harmonički red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

čiju smo divergenciju već dokazali (vidi str. 225), svi su ti omjeri kako vidimo manji od 1, ali to ne znači da harmonički red konvergira, jer vrijednosti tih omjera teže prema 1 pa nema takvog broja k od kojega bi svi ti omjeri bili manji, a k o j i b i s e r a z l i k o v a o o d 1 z a k o n a č n u v e l i č i n u.

Praktički se d'*Alembertov* kriterij primjenjuje tako, da se izračuna granična vrijednost omjera $(n+1)$-ga člana u_{n+1} i n-toga u_n, pustivši da $n \to \infty$, tj. računa se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L \tag{141}$$

Ako je $L < 1$, red konvergira

„ „ $L > 1$, red divergira

„ „ $L = 1$, neodlučno, a to znači da u tom slučaju d'Alembertov kriterij zataji, pa ispitivanje konvergencije reda treba provesti na neki drugi način.

Primjeri.

Konvergira li red

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!} = \frac{100}{1!} + \frac{100^2}{2!} + \cdots\cdots + \underbrace{\frac{100^n}{n!}}_{u_n} + \underbrace{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}_{u_{n+1}} + \cdots ?$$

Računamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{100^{n+1}\cdot n!}{100^n\cdot(n+1)!} = 100\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= 100\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots n}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots n(n+1)} = 100\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 100\cdot 0 = 0.$$

$L = 0 < 1$ — red konvergira.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{u_n} + \underbrace{\frac{n+1}{2^{n+1}}}_{u_{n+1}} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \text{podijelimo brojnik i}$$

$$\text{nazivnik s } n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$L = \frac{1}{2} < 1$ — red konvergira.

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n} = \frac{1!}{10} + \frac{2!}{10^2} + \frac{3!}{10^3} + \cdots\cdots + \underbrace{\frac{n!}{10^n}}_{u_n} + \underbrace{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}_{u_{n+1}} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,10^n}{10^{n+1}\cdot n!}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\frac{1}{10}\cdot\infty=\infty;$$

$L=\infty>1$ — **red divergira.**

4. Harmonički red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\underbrace{\frac{1}{n}}_{u_n}+\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{u_{n+1}}+\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\text{ podijelimo brojnik i nazivnik s } n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

$L=1$ — **neodlučno, ali znamo, da harmonički red divergira** (vidi str. 225).

5. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}=\frac{1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\,n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n\,(n+1)\cdot n!}{n!\,(n+1)\cdot n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad \text{prema (22)}$$

$L=e=2{,}71828\ldots>1$ **red divergira.**

Vidimo, da d' Alembertov kriterij ništa ne kaže o sumi reda!

Ispitaj za vježbu po d' Alembertovu kriteriju konvergenciju redova:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ($L=1$, neodlučno, ali znamo da taj red konvergira, vidi str. 228).

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-1)^2}$ ($L=1$, neodlučno).

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$ ($L=\infty$, red divergira).

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-5}{n\cdot 2^n}$ ($L={}^1/_2$, red konvergira).

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n+1}$ ($L=e$, red divergira).

3) Cauchyjev kriterij (Cauchy — čitaj Koši)

Ako u redu s pozitivnim članovima $\sqrt[n]{u_n}$ počevši od prvog člana reda ili bilo kojeg daljnjeg člana postane i ostane manji od pozitivnog broja k, koji je manji od 1, red konvergira, a ako postane i ostane veći ili jednak jedinici, red divergira.

To znači:

Ako za zadani red

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots$$

izračunamo

$$\sqrt[1]{u_1} = u_1\,; \quad \sqrt[2]{u_2}\,; \quad \sqrt[3]{u_3}\,, \ldots\ldots\,, \quad \sqrt[n]{u_n}\,, \ldots$$

pa ako vrijednosti tih korijena postanu i ostanu manje od nekog pravog pozitivnog razlomka k, hoji se razlikuje od 1 za neku **konačnu** veličinu, red konvergira. Inače red divergira.

Praktički se Cauchyjev kriterij primjenjuje tako, da se računa

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L \tag{142}$$

Ako je	$L < 1$,	red konvergira,
„ „	$L > 1$,	red divergira,
„ „	$L = 1$,	neodlučno.

Primjeri.

1. **Konvergira li red**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{u_n} + \cdots ?$$

Računamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

$\underline{L = 0 < 1 \text{ — red konvergira.}}$

2. **Konvergira li red**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \cdots\cdots + \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}_{u_n} + \cdots ?$$

Računamo:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \text{brojnik i nazivnik podijelimo s } n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

jer je prema (22) $\quad e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$

$$L = \frac{1}{e} < 1 \text{ — red konvergira.}$$

3. Konvergira li red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot \sin\frac{2}{n} = \sin 2 + 2^2 \cdot \sin 1 + 3^3 \cdot \sin\frac{2}{3} + \cdots\cdots + \underbrace{n^n \cdot \sin\frac{2}{n}}_{u_n} + \cdots ?$$

Računamo:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n \cdot \sin\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sqrt[n]{\sin\frac{2}{n}}\right) = \text{radikand množimo i dijelimo s } \frac{2}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sqrt[n]{\frac{2}{n} \cdot \frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{n}} \cdot \sqrt[n]{\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}} = \text{prema (21) i (86)} = \infty \cdot 1 \cdot 1 = \infty .$$

$$L = \infty > 1 \text{ — red divergira.}$$

4. Dokaži da red

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{1+n^2}\right)^n \text{ konvergira.}$$

b) Alternirani (izmjenični) redovi

To su redovi s naizmjence pozitivnim i negativnim članovima.

Opći oblik alterniranog reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}u_n + (-1)^n u_{n+1} + \cdots$$

Faktor $(-1)^{n-1}$ daje za $n = 1, 2, 3, \ldots$ $+1$ i -1 naizmjence, tj. daje članovima reda naizmjence predznake $+$ i $-$. Prema tome faktor $(-1)^{n-1}$ ispred u_n znači da je red alternirani.

Za konvergenciju alterniranih redova vrijedi Leibnizov kriterij (čitaj Lajbnic):

Alternirani red konvergira, ako njegovi članovi po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže nuli.

To znači:

Alternirani red

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \cdots$$

konvergira, ako je

1) $$|u_1| > |u_2| > |u_3| > |u_4| > \cdots$$

i

2) $$\lim_{n \to \infty} |u_n| = 0.$$

Vidimo da je nuždan uvjet za konvergenciju redova uopće za alternirane redove i dovoljan.

Leibnizov kriterij lako se dade dokazati, ako parcijalne sume toga reda $s_1 = u_1$ $s_2 = u_1 - u_2$, $s_3 = u_1 - u_2 + u_3$ itd. prikažemo na brojnom pravcu, uzevši u obzir da je $|u_1| > |u_2| > |u_3| \ldots$ Iz istog grafičkog prikaza slijede i dva osnovna svojstva alterniranih redova.

1. Suma alternirana reda leži između parcijalnih suma parnog indeksa, od kojih je veća, i neparnog indeksa, od kojih je manja.

2. Ako sumu alternirana reda aproksimiramo pomoću jedne od njegovih parcijalnih suma, činimo grešku koja je po apsolutnoj vrijednosti manja od prvog zanemarenog člana reda i ima s njim isti predznak.

Primjer.

Konvergira li red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ i kolika je pogreška, ako sumu reda s aproksimiramo sa s_{1000}, tj. s parcijalnom sumom od 1000 članova?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

Vidimo da članovi zadanog reda po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže nuli, dakle prema Leibnizovu kriteriju zadani red konvergira.

Ako uzmemo, da je suma toga reda $s \doteq s_{1000} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$ činimo grešku $s - s_{1000}$, koja je po apsolutnoj vrijednosti manja od prvog zanemarenog člana $u_{1001} = + \frac{1}{1001}$, tj. $|s - s_{1000}| < \frac{1}{1001}$ i ima predznak toga člana, tj. $s - s_{1000} > 0$.

Vidimo da naš red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, koji nosi ime Leibnizova reda, konvergira vrlo sporo, jer aproksimacija sume reda parcijalnom sumom od hiljadu članova sadrži gre-

šku koja je manja od $\frac{1}{1000}$, dakle niti treća decimala aproksimacije nije zajamčeno sigurna. Kasnije ćemo vidjeti da je $\ln 2$ suma Leibnizova reda (vidi dalje Mac Laurinove redove).

c) Redovi s pozitivnim i negativnim članovima poredanim bilo kako

To je najopćenitiji slučaj redova. Za redove te kategorije ne vrijede svi navedeni kriteriji: d'Alembertov, Cauchyjev, Leibnizov. S toga razloga uvodimo pojam apsolutne konvergencije reda.

1) Apsolutno konvergentni redovi i njihova svojstva

Neka nam je zadan red

I. $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - + \cdots$$

Taj red konvergira po Leibnizovu kriteriju, jer je to alternirani red kome članovi po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže nuli, a konvergira također i kao geometrijski red kome je $x = -\frac{1}{2}$, dakle je $|x| < 1$ (vidi str. 220).

Napišimo sada red apsolutnih vrijednosti članova reda I, tj. red koji, ima članove reda I, ali uzete po njihovoj apsolutnoj vrijednosti:

II. $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

I taj red konvergira, jer je geometrijski red kome je $x = \frac{1}{2} < 1$,

Za red I kažemo da konvergira ne samo kako je zadan, već i apsolutno, jer konvergira red II, tj. red apsolutnih vrijednosti njegovih članova.

Uzmimo još jedan red

III. $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots$$

Znamo da taj red konvergira po Leibnizu.

Napišimo opet red apsolutnih vrijednosti članova reda III.

Dobijemo red

IV. $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Znamo da je to harmonički red, koji divergira (vidi str. 225).

Za red III kažemo da ne konvergira apsolutno, već samo kako je zadan, jer divergira red apsolutnih vrijednosti njegovih članova.

Sada je pojam apsolutne konvergencije reda posve jasan:

Zadani red konvergira apsolutno, ako konvergira red apsolutnih vrijednosti njegovih članova.

Teorem. Ako red konvergira apsolutno, on konvergira i kako je napisan.

To znači: ako za zadani red u kojem su pozitivni i negativni članovi poredani bilo kako, napišemo red apsolutnih vrijednosti članova toga reda i dokažemo, npr. pomoću d' Alembertova kriterija, da taj red apsolutnih vrijednosti konvergira, tada konvergira i zadani red bez obzira na predznake njegovih članova.

Taj teorem daje dakle mogućnost, da se kriterii koji vrijede samo za redove s pozitivnim članovima primijene i za redove koji imaju osim pozitivnih i negativne članove, uzevši naravno apsolutne vrijednosti članova tih redova.

Navedimo nekoliko primjera.

Do sada smo ispitivali konvergenciju redova brojeva, sada ćemo uzeti redove funkcija od x i to redove potencija, pa ćemo određivati za koje vrijednosti x zadani red konvergira, a za koje divergira.

Primjeri.

Za koje vrijednosti x konvergira red

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots ?$$

Napišimo red apsolutnih vrijednosti članova zadanog reda; budući da bi x mogao biti također negativan, moramo i x uzeti apsolutno:

$$\frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^3}{3!} + \frac{|x|^5}{5!} + \cdots + \underbrace{\frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{u_n} + \underbrace{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{u_{n+1}} + \cdots$$

Sada možemo primijeniti d' Alembertov kriterij, jer su svi članovi toga reda pozitivni:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\dfrac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!\,|x|^{2n-1}} = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} =$$

$$= |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots\cdots (2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots\cdots (2n-1)\cdot 2n\cdot (2n+1)} = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = |x|^2\cdot 0 = 0$$

za sve konačne $|x|$.

Dobili smo dakle: $L = 0 < 1$ za sve $|x|$. Zaključujemo:

Red apsolutnih vrijednosti, a prema teoremu i zadani red konvergira za sve konačne $|x|$, tj. za x od $-\infty$ do $+\infty$ ili za $|x| < \infty$.

Kako ćemo kasnije vidjeti (vidi dalje Mac Laurinove redove), suma toga reda je $\sin x$.

2. $$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

Dokaži na isti način da taj red konvergira za sve $|x|$, tj. za $-\infty < x < +\infty$. Suma toga reda je $\cos x$ (vidi dalje Mac Laurinove redove).

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Red apsolutnih vrijednosti:

$$|x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3} + \frac{|x|^4}{4} + \cdots + \underbrace{\frac{|x|^n}{n}}_{u_n} + \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}_{u_{n+1}} + \cdots$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot |x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} =$$

(podijelili smo brojnik i nazivnik s n)

$= |x| \cdot 1 = |x|$.

$L = |x|$.

Prema tome:

za $|x| < 1$, tj. za $-1 < x < +1$, red apsolutnih vrijednosti, a dakle i zadani red konvergira,

za $|x| > 1$, zadani red divergira

za $|x| = 1$, tj. za $x = +1$ i $x = -1$ neodlučno.

Da se riješimo te neodlučnosti uvrstimo u zadani red:

1) $x = 1$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots$$

To je alternirani red, koji konvergira po Leibnizovu kriteriju.

2) $x = -1$.

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right).$$

To je harmonički red, za koji smo već dokazali da divergira.

Prema tome zadani red konvergira za

$$\underline{-1 < x \leq +1}.$$

Kako ćemo kasnije vidjeti suma toga reda je $\ln(1 + x)$. (Vidi dalje Mac Laurinove redove).

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = \binom{2}{1} x + \binom{4}{2} x^2 + \cdots + \binom{2n}{n} x^n + \binom{2(n+1)}{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

U redu apsolutnih vrijednosti bit će

$$u_n = \binom{2n}{n} |x|^n = \frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)\,\ldots\ldots\,[2n-(n-1)]}{1\cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} |x|^n$$

(vidi Repet. elem. matematike I, § 10)

$$u_{n+1} = \binom{2(n+1)}{n+1} |x|^{n+1} =$$

$$= \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,2n \ldots\ldots [2n+2-(n+1-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n+1} |x|^{n+1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\,(2n+1)\cdot 2n \ldots\ldots (n+2)\cdot n!}{n!\,(n+1)\cdot 2n\,(2n-1)\,(2n-2)\ldots\,(n+1)} |x| =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\,(2n+1)}{(n+1)^2} = 2|x| \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2|x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \right) = 4|x|$$

$$L = 4|x| < 1,$$

$$|x| < \frac{1}{4}$$

Red konvergira za $-\frac{1}{4} < x < +\frac{1}{4}$.

5. Dokaži da red $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$ konvergira za $|x| < 1$.

[$L = |x|^2$]

Navedimo sada nekoliko svojstava apsolutno konvergentnih redova.

1. U apsolutno konvergentnim redovima beskonačni red pozitivnih članova i beskonačni red nagativnih članova čine za sebe dva konvergentna reda.

2. S apsolutno konvergentnim redovima može se postupati kao s konačnim sumama. To znači: može se po volji mijenjati poredak članova reda, može se sabirati članove reda u skupine, a da se suma reda ne promijeni.

3. Ako od dva apsolutno konvergentna reda, kojima su sume s_1 i s_2, načinimo nov red tako, da pripadne članove tih redova zbrojimo ili oduzmemo, ili izmnožimo svaki član jednoga reda svakim članom drugoga, dobiveni red također konvergira apsolutno i suma mu je jednaka zbroju $s_1 + s_2$, odnosno razlici $s_1 - s_2$, odnosno umnošku $s_1 \cdot s_2$ suma zadanih redova.

Budući da je red s pozitivnim članovima identičan s redom apsolutnih vrijednosti svojih članova, sva svojstva apsolutno konvergentnih redova vrijede i za konvergentne redove s pozitivnim članovima.

2) Bezuvjetno i uvjetno konvergentni redovi

Bezuvjetno konvergentni red je onaj red, kojemu suma ne ovisi o poretku članova.

Nuždan i dovoljan uvjet da red konvergira bezuvjetno jest da taj red konvergira apsolutno.

Prema tome se pojmovi bezuvjetne i apsolutne konvergencije pokrivaju.

Uvjetno konvergentni ili polukonvergentni red je onaj red, kojemu suma ovisi o poretku članova.

Budući da bezuvjetno konvergira samo onaj red koji konvergira apsolutno, red koji ne konvergira apsolutno konvergira samo uvjetno.

Navedimo dva svojstva uvjetno konvergentnih redova.

1. U uvjetno konvergentnom redu red pozitivnih članova uzetih za sebe i red negativnih članova uzetih za sebe čine dva divergentna reda.

2. Kod uvjetno konvergentnog reda promjenom poretka članova reda može se dobiti kao suma reda bilo koji unaprijed zadani broj.

7. REDOVI FUNKCIJA

a) Općenito o redovima funkcija

Članovi reda neka su sada neke zadane funkcije od x. Gore smo već naveli nekoliko primjera tih redova, pri čemu su članovi reda bili potencije od x. Jasno je, da ima redova, kojima su članovi neke druge funkcije od x, npr. sinus-funkcije:

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

Uvrstimo li za x neku određenu vrijednost dobit ćemo red realnih brojeva, svaka nova vrijednost uvrštena za x daje nov red konstanata. Npr., ako u gore navedeni red uvrstimo $x = \frac{\pi}{2}$, dobijemo red konstanata: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Općenito ima beskonačni red funkcija oblik:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots\cdots + u_n(x) + \cdots,$$

gdje su u neke zadane funkcije od x.

Pretpostavimo li

1) da su članovi reda neprekinute funkcije od x u zatvorenom intervalu $[a, b]$ i

2) da taj red konvergira za sve x iz tog intervala $[a, b]$, tada uvrštenje bilo koje vrijednosti x iz intervala $[a, b]$ daje konvergentan red konstanata.

b) Uniformna konvergencija redova funkcija

Uvedimo važan pojam uniformne ili jednolične konvergencije redova funkcija.

Red funkcija konvergira uniformno ili jednoliko za sve x iz zatvorenog intervala $[a, b]$, ako apsolutnu vrijednost ostatka reda možemo načiniti po volji malenom, kad idemo u redu dovoljno daleko, i to za sve x iz tog intervala $[a, b]$.

Iz definicije uniformne korvergencije reda slijedi, da uniformno konvergirati može samo red funkcija i to samo s obzirom na neki interval $[a, b]$ i da je najbitnije u tom pojmu, da se ostatak reda može načiniti po volji malenim za sve x iz tog intervala $[a, b]$.

Kao primjer navedimo red funkcija:

$$(1-x) + (1-x)\,x + (1-x)\,x^2 + \cdots\cdots + (1-x)\,x^{n-1} +$$
$$+ (1-x)\,x^n + (1-x)\,x^{n+1} + \cdots$$

Tvrdimo da taj red konvergira za sve x iz zatvorenog intervala $[0, 1]$, tj. za $0 \leq x \leq 1$. Da to pokažemo, pređimo na slijed parcijalnih suma zadanog reda:

$$s_n = (1-x) + (1-x)\,x + \cdots\cdots + (1-x)\,x^{n-1}.$$

To je konačan geometrijski red, kojemu je kvocijent x a prvi član $a_1 = 1 - x$, pa prema poznatoj formuli $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ (vidi Repet. element. matematike) imamo:

$$s_n = (1-x)\,\frac{1-x^n}{1-x} = 1 - x^n.$$

Slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1 - x^n) = 1 \quad \text{za} \quad 0 < x < 1. \qquad \text{(a)}$$

Za $x = 1$ svi su članovi reda nula, jer je faktor $(1 - x)$ koji dolazi u svakom članu, jednak nuli, tako da je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0 \quad \text{za} \quad x = 1. \qquad \text{(b)}$$

Budući da je $\lim_{n\to\infty} s_n =$ konačan određen broj za sve x od 0 do uključivo 1, zaključujemo da zadani red konvergira u zatvorenom intervalu $[0, 1]$ i da je njegova suma prema (a) i (b):

$$s = \begin{vmatrix} 1 \text{ za } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ za } x = 1. \end{vmatrix}$$

Vidimo da je suma reda s prekinuta funkcija od x i to u tački $x = 1$, jer je za x od 0 do isključivo 1 suma reda 1, a za $x = 1$ daje skok na 0.

Ostatak je reda za $0 \leq x < 1$ (isključivši dakle $x = 1$):

$$R_n(x) = (1 - x)x^n + (1 - x)x^{n+1} + (1 - x)x^{n+2} + \cdots$$
$$= (1 - x)x^n(1 + x + x^2 + \cdots).$$

(Za $x = 1$ ne bismo smjeli izlučiti faktor $(1 - x)$, koji bi bio jednak nuli).

Treći faktor je beskonačni geometrijski red, kojemu je prema (140) suma $s = \frac{1}{1-x}$. Prema tome izraz za $R_n(x)$ prima oblik:

$$R_n(x) = (1 - x)x^n \frac{1}{1-x} = x^n.$$

Želimo li ići u redu tako daleko, da ostatak bude po volji malen za svaki x intervala, vidimo da to nije moguće. Naime to bi značilo da možemo odabrati n tako velik, da ostatak x^n bude manji od nekog po volji malenog odabranog pozitivnog broja ε, i to za svaki x toga intervala. Međutim ako x odaberemo dosta blizu jedinici uvijek možemo postići da x^n bude v e ć i od toga ε. Treba samo načiniti $1 > x > \sqrt[n]{\varepsilon}$ ($\sqrt[n]{\varepsilon}$ je tim bliži jedinici, čim je n veći).

Dakle, zadani red n e konvergira uniformno u zatvorenom intervalu $[0, 1]$, tj. za x od 0 do uključivo 1, jer ne možemo u redu ići tako daleko, da ostatak reda bude po volji malen za sve vrijednosti x iz tog zatvorenog intervala.

Iz navedenog primjera već naziremo važno svojstvo uniformno konvergentnih redova:

Suma reda koji konvergira uniformno u intervalu $[a, b]$, neprekinuta je funkcija od x u tom intervalu $[a, b]$.

Navedimo još:

1) Weierstrassov kriterij za uniformnu konvergenciju redova funkcija

Red, kojemu su članovi neprekinute funkcije od x u intervalu $[a, b]$, konvergira uniformno u tom intervalu $[a, b]$, ako su za sve x iz tog intervala $[a, b]$ članovi dobivenih redova konstanata manji od pripadnih članova jednog drugog reda konstanata, za koji znamo da konvergira.

2) Deriviranje redova funkcija

Zadani red funkcija smijemo derivirati član po član i suma tako dobivena reda derivacija jednaka je derivaciji sume zadanog reda,

1) ako članovi zadanog reda imaju neprekinute derivacije,

2) ako zadani red konvergira uniformno i

3) ako i dobiveni red derivacija konvergira uniformno.

Drugim riječima uz gornje tri pretpostavke red funkcija možemo derivirati član po član kao konačnu sumu.

Kao primjer uzmimo Mac Laurinov red za $\sin x$ (vidi dalje t. 9):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Kako taj red odgovara gore navedenim pretpostavkama, deriviranje toga reda daje Mac Laurinov red za $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{3!} \cdot 3x^2 + \frac{1}{5!} \cdot 5x^4 - \frac{1}{7!} \cdot 7x^6 + \cdots$$

ili

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

(vidi dalje tačku 9).

ordinati $f(x_0)$, + duljina intervala h pomnožena derivacijom funkcije u istoj tački M_0 apscise x_0, tj. sa $f'(x_0)$, + $\frac{h^2}{2!}$ puta druga derivacija funkcije u istoj tački M_0, + $\frac{h^3}{3!}$ puta treća derivacija funkcije u tački M_0 itd. +, konačno, ostatak R_n koji ne možemo izračunati, jer je n-ta derivacija funkcije $f^{(n)}(x_0+\Theta h)$ uzeta u nekoj nepoznatoj nam srednjoj tački apscise $(x_0+\Theta h)$.

Kako vidimo, vrijednost funkcije u tački M apscise (x_0+h), tj. $f(x_0+h)$, izražena je pomoću vrijednosti funkcije i vrijednosti njenih derivacija u tački M_0 apscise x_0 + ostatak R_n. Sve je dakle bazirano na zadanoj tački M_0 apscise x_0.

Uvrstimo li u Taylorovu formulu (143) $x_0=0$, tj. premjestimo li tačku M_0 na os Y pa mjesto h napišemo x, dobit ćemo Mac Laurinovu formulu (čitaj Meklorin):

$$f(x)=f(0)+x\cdot f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n, \qquad (144)$$

a ostatak R_n će sada glasiti:

1) u Lagrangeovom obliku: $R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\Theta x)$,

gdje je $0<\Theta<1$, tj. Θ je pravi pozitivni razlomak inače neodređen.

2) u Cauchyjevom obliku:

$$R_n=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\Theta_1)^{n-1}f^{(n)}(\Theta_1 x), \quad \text{gdje je} \quad 0<\Theta_1<1.$$

Kako se vidi iz slike 142, vrijednost funkcije $f(x)$ u tački M apscise x, tj. $f(x)$, opet je izražena pomoću vrijednosti funkcije u tački M_0 apscise 0, tj. pomoću $f(0)$, i pomoću duljine intervala x i vrijednosti derivacija funkcije $f(x)$ u istoj tački M_0 apscise 0 + ostatak R_n, koji se opet ne može izračunati, jer je n-ta derivacija funkcije $f^{(n)}(\Theta x)$ uzeta u Θx. tj. u nekoj srednjoj tački intervala duljine x. Sve je sada bazirano na tački M_0 apscise 0.

Napišimo Taylorove i Mac Laurinove formule uzevši ostatak u Lagrangeovom obliku:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\Theta h),\ 0<\Theta<1 \qquad (143a)$$

Pretpostavimo dakle, da naša funkcija $f(x)$ ima derivacije svih redova i da ostatak R_n teži po apsolutnoj vrijednosti nuli kad n teži u beskonačnost, tj. neka je

$$\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0.$$

U tom slučaju, tj. kad n teži u beskonačnost a ostatak teži nuli, polinom $P_{n-1}(x)$ dobije beskonačno mnogo članova i prelazi u beskonačni Mac Laurinov red, koji konvergira za one x za koje ostatak teži nuli, i ima za sumu funkciju $f(x)$, za koju smo napisali Mac Laurinovu formulu, pa možemo tu funkciju $f(x)$ aproksimirati pomoću parcijalnih suma Mac Laurinova reda i računati po volji tačno njene vrijednosti za sve one vrijednosti x za koje ostatak $|R_n| \to 0$.

Dobijemo tada, kad je $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$, Mac Laurinov r e d za funkciju $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \cdots, \quad (145)$$

koji konvergira i ima za sumu $f(x)$ i to za one vrijednosti x za koje ostatak teži nuli, kad n teži u beskonačnost. Iz navedenog vidimo svu važnost d i s k u s i j e o s t a t k a, tj. dokaza da ostatak teži nuli kad n teži u beskonačnost, jer za one x za koje ostatak ne teži nuli Mac Laurinov red divergira, pa ne možemo pomoću toga reda aproksimirati zadanu funkciju pomoću parcijalnih suma toga reda, pa ni računati njene vrijednosti.

Sve što smo rekli za Mac Laurinov r e d vrijedi i za Taylorov red:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \cdots \quad (146)$$

Praktički se Taylorov red primjenjuje obično u drugom obliku, koji se dobije iz (146) tako, da se označi:

$$x_0 + h = x, \quad \text{tada je} \quad h = x - x_0$$

Uvrštenje u (146) daje:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots\cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \cdots \quad (146a)$$

Vidimo, da su Mac Laurinovi i Taylorovi redovi funkcija i to redovi potencija.

9. RAZVOJ U MAC LAURINOV RED POJEDINIH FUNKCIJA

a) Postupak

Napišimo Mac Laurinovu formulu pa prema njoj računamo za zadanu funkciju $f(x)$ koeficijente, tj. samo one faktore, koji sadržavaju funkciju f, tj. $f(0), f'(0), f''(0), \ldots\ldots, f^{(n)}(\Theta x)$, dok $x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots, \frac{x^n}{n!}$ ostaju za sve funkcije bez promjene. Vrijednosti derivacije računamo najprije općenito za x, a kad je ta derivacija izračunata uvrštavamo $x = 0$. Uvrstivši tako izračunate vrijednosti u (144a), dobijemo Mac Laurinovu formulu za zadanu funkciju, pa prelazimo na diskusiju ostatka, tj. računamo $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n|$, da odredimo, prelazi li Mac Laurinova formula koju smo napisali za zadanu funkciju u beskonačni Mac Laurinov red i za koje vrijednosti x taj red konvergira i ima za sumu zadanu funkciju. Na isti način razvija se funkcija u Taylorov red.

b) Funkcija $f(x) = e^x$

Prema Mac Laurinovoj formuli (144a) uz ostatak u Lagrangeovom obliku:

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\Theta x)$$

računamo:

$$\begin{array}{ll}
\underline{f(x) = e^x}, & \underline{f(0)} = e^0 = \underline{1} \\
f'(x) = e^x, & \underline{f'(0)} = e^0 = \underline{1} \\
f''(x) = e^x, & \underline{f''(0)} = e^0 = \underline{1} \\
f'''(x) = e^x, & \underline{f'''(0)} = e^0 = \underline{1} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
f^{(n)}(x) = e^x, & \underline{f^{(n)}(\Theta x) = e^{\Theta x}}.
\end{array}$$

Uvrstimo li podvučeno u Mac Laurinovu formulu (144a) dobijemo Mac Laurinovu formulu za funkciju e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} \cdot e^{\Theta x}, \qquad 0 < \Theta < 1.$$

Prelazimo na diskusiju ostatka.

Ostatak je $R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\Theta x}$ ili po apsolutnoj vrijednosti:

$$|R_n| = \frac{|x|^n}{n!} e^{\Theta x}$$

(za $n!$ i $e^{\Theta x}$ nema smisla uzimati apsolutne vrijednosti, jer su to bitno pozitivne veličine).

Prelazimo na limes:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} e^{\Theta x}.$$

Budući da tražimo graničnu vrijednost ostatka pustivši da samo n teži u beskonačnost, dok je x neka zadana konačna vrijednost, $e^{\Theta x}$ je neka vrijednost, koja je sigurno manja ili jednaka e^x (Θ se može mijenjati, kad se mijenja n), ako je $x > 0$, a sigurno manja ili jednaka $e^0 = 1$, kad je $x < 0$. Označimo tu gornju među sa C (koji više ne ovisi o mijenjanju broja n), pa imamo:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n| = C \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!},$$

a kako je prema (21):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \qquad \text{za sve } |x|,$$

dobijemo:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n| = C \cdot 0 = 0 \qquad \text{za sve } |x|.$$

Budući da ostatak teži nuli, kad $n \to \infty$, i to za sve $|x|$, Mac Laurinova formula za e^x prelazi u beskonačni Mac Laurinov red:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \tag{147}$$

koji konvergira za sve $|x|$, tj. za $-\infty < x < +\infty$.

Pomoću toga reda možemo računati vrijednost e^x za sve x po volji tačno.

Na primjer za $x = 1$, dobijemo:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \tag{148}$$

To je red za računanje vrijednosti broja e. Primjer za izračunavanje broja e i to na 5 decimala tačno naveli smo već prije (str. 226).

c) Funkcija $f(x) = \sin x$

Prema Mac Laurinovoj formuli (144a) računamo:

$$\begin{array}{ll} \underline{f(x) = \sin x,} & \underline{f(0)} = \sin 0 = \underline{0} \\ f'(x) = \cos x, & \underline{f'(0)} = \cos 0 = \underline{1} \\ f''(x) = -\sin x, & \underline{f''(0)} = -\sin 0 = \underline{0} \\ f'''(x) = -\cos x, & \underline{f'''(0)} = -\cos 0 = \underline{-1} \\ f^{(4)}(x) = \sin x, & \underline{f^{(4)}(0)} = \sin 0 = \underline{0}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Vidimo, da su sve derivacije neparnog reda naizmjence $\cos x$ i $-\cos x$, pa za $x = 0$ primaju vrijednost $+1$, odnosno -1, dok su sve derivacije parnog reda jednake nuli, pa će u Mac Laurinovoj formuli za $\sin x$ otpasti svi članovi parnih potencija x. To je razumljivo jer je $\sin x$ neparna (liha) funkcija. Prema tome:

Mac Laurinova formula za neparne funkcije sadrži samo članove neparnih potencija x, a za parne (take) funkcije samo članove parnih potencija x [vidi dalje d)]. Samo funkcije koje nisu ni parne ni neparne, sadržavaju članove parnih i neparnih potencija x [vidi b) i dalje e)].

Računamo dakle dalje samo derivacije neparnih redova funkcije $\sin x$ i to derivacije $(2n-1)$-ga reda za $x = 0$ i reda $(2n+1)$-ga za ostatak, tj. za $x = \Theta x$:

$$\underline{f^{(2n-1)}(0)} = \pm 1 = \underline{(-1)^{n-1}},$$

npr. za $n = 2$ dobijemo, uzevši u obzir da je $2n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$:

$$f^{(2n-1)}(0) = f'''(0) = (-1)^3 = -1,$$

a za $n = 3$: $\quad f^{(2n-1)}(0) = f^{(5)}(0) = (-1)^4 = +1$ itd.

Konačno $\quad \underline{f^{(2n+1)}(\Theta x) = (-1)^n \cdot \cos(\Theta x).}$

Uvrštenje podvučenog u (144a) daje Mac Laurinovu formulu za $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\Theta x), \qquad 0 < \Theta < 1. \qquad (149)$$

Diskusija ostatka.

$$|R_n| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot |\cos \Theta x|.$$

Kako je $|\cos\Theta x| \leq 1$, a $|R_n| > 0$ imamo

$$0 < |R_n| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Prema (21):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \qquad \text{za sve } |x|.$$

Ostatak $|R_n|$ zatvorili smo dakle između dvije veličine, od kojih je jedna nula, a druga teži nuli.

Slijedi $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0 \qquad$ za sve $|x|$.

Prema tome Mac Laurinova formula za $\sin x$ prelazi u beskonačni Mac Laurinov red:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots + (+1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \tag{150}$$

koji konvergira za sve $|x|$, tj. za $-\infty < x < +\infty$.

Pomoću toga reda možemo računati po volji tačno vrijednosti $\sin x$ za sve $|x|$.

Npr. treba izračunati sin 7° na 4 decimale tačno. x je naravno lučna mjera kuta, dakle uvrštavamo u (150) $x = \text{arc}\, 7^0 = \frac{7^0}{\rho^0} = 0{,}12217$.

Dobijemo:

$$\sin 7^0 = 0{,}12217 - \frac{0{,}12217^3}{3!} + \frac{0{,}12217^5}{5!} - \cdots$$

$$= 0{,}12217 - \frac{0{,}00182}{6} + \frac{0{,}00003}{120} - \cdots$$

$$= 0{,}12217 - 0{,}00030 + 0{,}00000 \cdots\cdots \doteq 0{,}12187.$$

<u>$\sin 7^0 = 0{,}1219$ na 4 decimale tačno.</u>

Često se u izvodima $\sin x$ aproksimira s prvim ili s prva dva člana Mac Laurinova reda, tj. uzima se da je $\sin x \doteq x$, odnosno $\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!}$. Geometrijski to znači, da u prvom slučaju $\sin x$ aproksimiramo tangentom na sinusoidu u ishodištu, a u drugom slučaju kubnom funkcijom, koja ima u ishodištu istu tangentu.

Nastaje pitanje koliki smije biti x, da pogreška aproksimacije ne prekorači u prvom i drugom slučaju npr. 1% od uzete za $\sin x$ vrijednosti.

1. slučaj. $\sin x \doteq x$

Prema (149) imamo za $n = 1$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}\cos(\Theta x), \quad \text{gdje je} \quad 0 < \Theta < 1.$$

Ostatak $|R_1| = \frac{|x|^3}{3!}|\cos(\Theta x)|$ daje mogućnost ocijeniti pogrešku aproksimacije.

Budući da je $|\cos(\Theta x)| \leq 1$, imamo:

$$|R_1| \leq \frac{|x|^3}{3!} \cdot 1.$$

To je granična vrijednost pogreške uzete aproksimacije.

Diskutiramo: pogriješimo li za x, tj. za čitavu vrijednost uzetu za $\sin x$, pogreška iznosi 100%, a kako naša maksimalna pogreška aproksimacije $\frac{|x|^3}{3!}$ ima da iznosi 1%, pišemo po trojnom pravilu:

$$x \cdots\cdots 100\%$$

$$\frac{x^3}{3!} \cdots\cdots 1\%,$$

pa dobijemo razmjer:

$$x : \frac{x^3}{3!} = 100 : 1,$$

a odatle

$$\frac{100}{6} x^3 = x$$

ili

$$100x^3 - 6x = 0$$

ili

$$x(x^2 - 0{,}06) = 0.$$

Slijedi:

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{0{,}06} = \pm 0{,}245$$

ili u kutnoj mjeri $$x_{2,3} \doteq \pm 14^0.$$

Možemo dakle uzimati, da je $\sin x = x$ za sve $|x| \leq 0{,}245$, tj. za $-0{,}245 \leq x \leq +0{,}245$ ili u kutnoj mjeri za sve $x \leq 14^0$, a da pogreška aproksimacije ne prekorači 1% od uzete za $\sin x$ vrijednosti.

2. slučaj. $\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!}$.

Prema (149) za $n = 2$ imamo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cos(\Theta x),$$

gdje je ostatak po apsolutnoj vrijednosti

$$|R_2| = \frac{|x|^5}{5!} \cdot |\cos \Theta x|, \quad \text{odnosno} \quad |R_2| \leq \frac{|x|^5}{5!},$$

jer je $|\cos \Theta x| \leq 1$.

Diskutirajući na slični način dobijemo prema

$$x - \frac{x^3}{3!} \cdots\cdots 100\%$$

$$\frac{x^5}{5!} \cdots\cdots 1\%$$

razmjer: $$\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) : \frac{x^5}{5!} = 100 : 1,$$

a odatle $$\frac{100}{120} x^5 = x - \frac{x^3}{6}$$

ili $$100x^5 = 120x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$$

ili $$x(x^4 + 0{,}2x^2 - 1{,}2) = 0.$$

Odatle je $x_1 = 0$ i $x^4 + 0{,}2x^2 - 1{,}2 = 0$.

Riješimo li tu bikvadratnu jednadžbu, dobijemo:

$$(x^2)_{2,3} = -0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 + 1{,}2} = -0{,}1 \pm 1{,}1$$

ili $$(x^2)_2 = 1 \qquad \text{(a)}$$

$$(x^2)_3 = -1{,}2.$$

Realna rješenja dobijemo iz (a): $x_{2,3} = \pm 1$.

Prema tome, ako se zadovoljimo da pogreška aproksimacije ne prekorači 1% od uzete za $\sin x$ vrijednosti, možemo slobodno uzimati $x - \frac{x^3}{3!}$ mjesto $\sin x$ i to za sve $|x| \leq 1$ ili u kutnoj mjeri za sve

$$|x| \leq 57^0 17' 45''.$$

Kad smo $\sin x$ aproksimirali s x, mogli smo uz pogrešku od 1% uzimati x do 14^0, a sada već do $57{,}3^0$.

d) Funkcija $f(x) = \cos x$

Postupajući na način, potanko prikazan kod razvoja funkcije $\sin x$ (vidi prije), dobijemo:

Mac Laurinovu formulu za $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \cos(\Theta x), \qquad 0 < \Theta < 1. \qquad (151)$$

Na isti način provedena diskusija ostatka pokazuje da je

$$\lim_{n\to\infty} |R_n| = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{|x|^{2n}}{2n!} \cdot |\cos(\Theta x)| \right] = 0 \qquad \text{za sve} \quad |x|$$

pa dobijemo Mac Laurinov red za $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots, \qquad (152)$$

koji konvergira za sve $|x|$, tj. za $-\infty < x < +\infty$.

Vidimo da red funkcije $\cos x$ sadrži samo parne potencije x, jer je $\cos x$ parna funkcija.

Pomoću toga reda možemo računati po volji tačno vrijednosti $\cos x$ za sve $|x|$, a također aproksimirati $\cos x$ s prvim članovima reda uz ocjenjivanje pogreške aproksimacije, kako smo to pokazali za funkciju $\sin x$. Postupajući na taj način možemo na primjer dokazati da je za sve $|x| \leq 0{,}1412$, odnosno za $|x| \leq 8^0 30'$, $\cos x = 1$ uz pogrešku od $1^0/_0$.

e) Funkcija $f(x) = \ln(1 + x)$

Ovu funkciju razvit ćemo neposredno u Mac Laurinov red, jer smo konvergenciju toga reda već prije dokazali po d' Alembertovu kriteriju (vidi str. 237). Primijetimo, da $\ln x$ ne možemo razviti u Mac Laurinov red, jer je za $f(x) = \ln x$ prvi član reda $f(0) = \ln 0 = -\infty$, stoga smo dali logaritamskoj krivulji pomak za 1 na lijevo.

Računamo dakle prema (145):

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \cdots$$

$$\underline{f(x) = \ln(1+x)}, \qquad \underline{f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \underline{f'(0) = 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad \underline{f''(0) = -1}$$

$$f'''(x) = +\frac{1\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2!}{(1+x)^3}, \qquad \underline{f'''(0) = 2!}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2!\, 3(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\frac{3!}{(1+x)^4}, \qquad \underline{f^{(4)}(0) = -3!} \quad \text{itd.}$$

Uvrstimo li podvučeno u (145):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!}\cdot 1 + \frac{x^3}{3!}\cdot 2! - \frac{x^4}{4!}\cdot 3! + \cdots,$$

dobit ćemo nakon skraćivanja koeficijenata:

Mac Laurinov red za $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \tag{153}$$

koji konvergira samo za $-1 < x \leq +1$, kako smo to već prije dokazali. Pazi, taj red nema faktorijela!

Budući da red za $\ln(1+x)$ konvergira samo za x od -1 do uključivo $+1$, najveći logaritam koji možemo pomoću toga reda izračunati jest $\ln 2$, koji dobijemo ako u red uvrstimo $x = 1$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

To je poznati nam Leibnizov red, koji vrlo sporo konvergira (vidi str. 234).

f) Funkcija $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$

Da dobijemo red, pomoću kojega bi se mogli računati prirodni logaritmi svih brojeva, dakle i obični logaritmi $(\log x = M\cdot \ln x)$, uvrstimo $-x$ mjesto x u red (153):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

dobijemo:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \qquad \Big| \; -$$

Oduzimanjem dobijemo:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

ili

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right) \qquad (154)$$

Taj red konvergira za $-1 < x < +1$.

Npr., da izračunamo $\ln 7$ stavimo prema (154):

$$\frac{1+x}{1-x}=7 \quad \text{ili} \quad 1+x=7-7x \quad \text{ili} \quad 8x=6,$$

a odatle je $x=\frac{3}{4}<1$, red će konvergirati.

Uvrštenje u (154) daje red:

$$\ln 7=2\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5+\cdots\right]$$

pomoću kojega možemo izračunati $\ln 7$ po volji tačno, na način prikazan pri računanju broja e (vidi str. 226)

Na 5 decimala tačno dobijemo

$$\ln 7=1{,}94591 .$$

Primijetimo, da se praktički logaritmi računaju pomoću drugih redova, koji znatno brže konvergiraju.

g) Binomni red

To je red za $f(x)=(1+x)^m$.

Pretpostavljamo da je m bilo koji realan broj, ali različit od prirodnog, jer bismo za $m=$ prirodan broj dobili poznati binomni poučak (vidi Repet. element. matematike), npr. za $m=3$:

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3 .$$

Računamo prema (145):

$$f(x)=(1+x)^m, \qquad \underline{f(0)=(1+0)^m=1}$$

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1}, \qquad \underline{f'(0)=m}$$

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}, \qquad \underline{f''(0)=m(m-1)}$$

$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \qquad \underline{f'''(0)=m(m-1)(m-2)}$$

. . . .

. . . .

Uvrstimo li podvučeno u (145) dobijemo **binomni red**:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 +$$

$$+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n}x^n+\cdots, \qquad (155)$$

koji konvergira za $|x| < 1$, tj. za $-1 < x < +1$, dok za $m > 0$ konvergira i na granicama tog intervala, tj. za $x = 1$ i za $x = -1$. (Dokaži pomoću d' Alembertova kriterija da binomni red konvergira za $|x| < 1$).

Navedimo nekoliko primjera za razvoj u binomni red.

Primjeri.

Razvij u red:

1. $$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}.$$

Uvrstimo u (155) $m = \frac{1}{2}$. Dobijemo:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots \quad \text{ili}$$

$$\underline{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + - \cdots}$$

konvergira za $|x| \leqq 1$.

2. $$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = (1-x)^{-1/3}.$$

Uvrstimo u (155) $m = -\frac{1}{3}$ i $-x$ mjesto x. Dobijemo:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = 1 - \frac{1}{3}(-x) + \frac{-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{1\cdot 2}(-x)^2 +$$

$$+\frac{-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(-x)^3 + \cdots$$

$$\underline{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{14}{81}x^3 + \cdots}$$

konvergira za $|x| < 1$.

3. $$\frac{1}{(1+x^2)^2} = (1+x^2)^{-2}.$$

Uvrstimo u (155) $m = -2$ i x^2 mjesto x. Dobijemo:

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = 1 - 2x^2 + \frac{-2\cdot(-3)}{1\cdot 2}x^4 + \frac{-2\cdot(-3)\cdot(-4)}{1\cdot 2\cdot 3}x^6 + \cdots$$

$$\underline{\frac{1}{(1+x^2)^2} = 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + - \cdots}$$

konvergira za $|x| < 1$.

Za male $|x|$ mogu se s dovoljnom tačnosti uzeti samo prva dva člana binomnog reda, tj. može se uzeti, da je

$$(1+x)^m \doteq 1 + mx \tag{156}$$

za $|x|$ malen.

Na primjer:

1) $$\sqrt[7]{1{,}00023} = (1+0{,}00023)^{\frac{1}{7}}$$

kako je $x = 0{,}00023$ malen, imamo prema (156):

$$\sqrt[7]{1{,}00023} \doteq 1 + \frac{1}{7}\cdot 0{,}00023 \doteq 1 + 0{,}00003 \doteq \underline{1{,}00003}.$$

2) $$\sqrt[5]{0{,}9986} = \sqrt[5]{1-0{,}0014} = (1-0{,}0014)^{1/5}$$

kako je $|x| = |-0{,}0014| = 0{,}0014$ opet malen, imamo:

$$\sqrt[5]{0{,}9986} \doteq 1 - \frac{1}{5}\cdot 0{,}0014 \doteq 1 - 0{,}0003 \doteq \underline{0{,}9997}.$$

Pomoću binomnog reda možemo računati vrijednosti bilo kojih korijena, ali kod toga moramo paziti da bude $|x| < 1$, jer će inače red divergirati.

Primjeri.

1. $$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\sqrt[3]{1+\frac{3}{27}} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3} =$$

$$= 3\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots\right] = 3\ \underline{\left[1 + \frac{1}{27} - \frac{1}{729} + - \cdots\right]}.$$

Iz toga reda možemo $\sqrt[3]{30}$ izračunati po volji tačno.

2. $$\sqrt[3]{19} = ?$$

Kušajmo kao prije:

$$\sqrt[3]{19} = \sqrt[3]{8+11} = 2\sqrt[3]{1+\frac{11}{8}} = 2\left(1+\frac{11}{8}\right)^{1/3}$$

Ne valja, jer je $x = \frac{11}{8} > 1$, pa će red divergirati.

Moramo postupati ovako:

$$\sqrt[3]{19} = \sqrt[3]{27-8} = 3\sqrt[3]{1-\frac{8}{27}} = 3\left(1-\frac{8}{27}\right)^{1/3} =$$

sad je $x = -\frac{8}{27}$, a kako je taj $|x| < 1$, red će konvergirati

$$= 3\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{8}{27}\right)+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{1\cdot 2}\cdot\left(-\frac{8}{27}\right)^2+\cdots\right] =$$

$$= \underline{3\left[1-\frac{8}{81}-\frac{64}{6561}-\cdots\right]}.$$

Iz toga reda možemo $\sqrt[3]{19}$ izračunati po volji tačno.

h) Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$

Postupajući na gore navedeni način dobijemo Mac Laurinov red za $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots \qquad (157)$$

koji konvergira za $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$.

Opći zakon koeficijenata ovdje nije jednostavan.

i) Hiperbolne funkcije

Slično kao $\sin x$ i $\cos x$ razviju se po Mac Laurinovoj formuli funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$. Načini to! Slična je diskusija ostatka pa i sami redovi.

Dobijemo: Mac Laurinov red za $\operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (158)$$

Konvergira za sve $|x|$, tj. za $-\infty < x < +\infty$.

Mac Laurinov red za $\operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots \qquad (159)$$

Konvergira za sve $|x|$, tj. za $-\infty < x < +\infty$.

Znamo da je lančanica $y = \operatorname{ch} x$ slična paraboli u svome najdonjem dijelu (vidi sl. 76). To se najbolje vidi, ako $\operatorname{ch} x$ aproksimiramo s prva dva člana reda (159):

$$\operatorname{ch} x \doteq 1 + \frac{x^2}{2}$$

a to je kvadratna funkcija, kojoj je graf parabola s vrhom (0, 1).

j) Arcus-funkcije

Te funkcije se najjednostavnije razviju u red integralnim putem, pa ćemo to u integralnom računu pokazati. Zasada navedimo samo rezultate:

Mac Laurinov red za $\arcsin x$:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (160)$$

Konvergira za $|x| < 1$, tj. za $-1 < x < +1$.

Mac Laurinov red za $\operatorname{arc\,tg} x$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \qquad (161)$$

Konvergira za $-1 < x \leq +1$.

Uvrstimo li u taj red $x = 1$, dobit ćemo red pomoću kojega možemo izračunati po volji tačno broj π, jer je $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \qquad (162)$$

Taj red konvergira vrlo sporo (vidi alternirane redove str. 234).

10. PRIMJER ZA RAZVOJ FUNKCIJE U TAYLOROV RED

Treba razviti funkciju $\sin x$ u Taylorov red i to iz tačke M_0 apscise $x_0 = 1$.

Računamo prema (146a):

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots$$

$$\underline{f(x) \quad = \sin x,} \qquad \underline{f(x_0) \quad = \sin 1}$$
$$\underline{f'(x) \quad = \cos x,} \qquad \underline{f'(x_0) \quad = \cos 1}$$
$$\underline{f''(x) \quad = -\sin x,} \qquad \underline{f''(x_0) \quad = -\sin 1}$$
$$\underline{f'''(x) \quad = -\cos x,} \qquad \underline{f'''(x_0) \quad = -\cos 1}$$
$$\underline{f^{(4)}(x) \quad = \sin x,} \qquad \underline{f^{(4)}(x_0) \quad = \sin 1\,.}$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Uvrstimo li podvučeno i $x_0 = 1$ u (146a) dobijemo:

$$\sin x = \sin 1 + (x-1)\cos 1 - \frac{(x-1)^2}{2!}\sin 1 - \frac{(x-1)^3}{3!}\cos 1 +$$
$$+ \frac{(x-1)^4}{4!}\sin 1 + \cdots$$

Sada možemo još uvrstiti $\sin 1 = \sin 57^0 17' 45'' \doteq 0{,}841$, $\cos 1 \doteq 0{,}540$, pa uredivši dobijemo:

$$\sin x = 0{,}841 + 0{,}540\,(x-1) - 0{,}421\,(x-1)^2 - 0{,}090\,(x-1)^3 +$$
$$+ 0{,}053\,(x-1)^4 + \cdots$$

11. REDOVI POTENCIJA I NJIHOVA SVOJSTVA

Vidjeli smo da su Mac Laurinovi i Taylorovi redovi redovi potencija. Može se čak pokazati, da se realna funkcija $f(x)$ može razviti u red potencija samo na jedan način i da je dobiveni red Mac Laurinov red. Iz toga već slijedi velika važnost redova potencija, koji općenito imaju oblik:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots \qquad (163)$$

Tu su $a_0, a_1, a_2, \ldots$ realni koeficijenti, dok je x realna promjenljiva pozitivna ili negativna.

Navedimo nekoliko svojstava redova potencija.

I. Ako red potencija konvergira za neki $x = x_1$, tada on konvergira apsolutno za svaku vrijednost od x, koja je po apsolutnoj vrijednosti manja od x_1, tj. konvergira za sve vrijednosti x, koje leže između $-x_1$ i $+x_1$ isključivši granice.

Čim znamo dakle jednu vrijednost x_1, za koju red potencija konvergira, imamo odmah interval $(-x_1, +x_1)$, u kojem konvergira taj red.

II. Radij konvergencije reda potencija.

Ispitajmo po d' Alembertovu kriteriju konvergenciju reda potencija (163), tj. izračunajmo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

ili ako stavimo
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D \tag{a}$$

dobijemo:
$$L = |x| \cdot D.$$

Znamo da po d' Alembertu za

$L = |x| \cdot D < 1$ red konvergira, a za

$L = |x| \cdot D > 1$ red divergira

ili, ako gornje nejednakosti podijelimo s D, dobit ćemo da

red konvergira za $|x| < \frac{1}{D}$ i da

red divergira za $|x| > \frac{1}{D}$.

Kako je prema (a)
$$\frac{1}{D} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

imamo uz oznaku: $\frac{1}{D} = R$,

da za $|x| < R$ red konvergira,

a za $|x| > R$ red divergira.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{164}$$

zove se **radij konvergencije reda potencije**, pa kako $|x| < R$ znači da je $-R < x < +R$ imamo, s obzirom na svojstvo I, drugo svojstvo redova potencija:

Red potencije konvergira apsolutno u intervalu duljine $2R$ položenom simetrično s obzirom na ishodište.

Navedimo nekoliko primjera.

Odredi radij konvergencije reda

1) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$$

Kako je $a_n = \frac{1}{n!}$, a $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, dobijemo prema (164):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdot n(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdot n} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Radij konvergencije $R = \infty$, dakle red za e^x konvergira za $|x| < \infty$, tj. za x od $-\infty$ do $+\infty$, a to smo prije dokazali.

Funkcije, kojim je radij konvergencije $R = \infty$, zovu se c i j e l e t r a n s c e n d e n t n e f u n k c i j e. e^x je dakle cijela transcendentna funkcija, a također $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$, jer njihovi redovi potencije imaju $R = \infty$, kako smo to prije pokazali.

2) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$

Prema (164):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Radij konvergencije $R = 1$, pa red za $\ln(1+x)$ konvergira za sve $|x| < 1$ [također i za $x = +1$ (vidi str. 253)].

Kako je R konačna veličina $\ln(1+x)$ nije cijela već o b i č n a t r a n s c e n d e n t n a f u n k c i j a. Isto vrijedi za sve funkcije, koje smo razvijali u binomni red, a također i za beskonačni geometrijski red, jer redovi tih funkcija, kako smo to gore pokazali, konverg raju za $|x| < 1$, pa je njihov $R = 1$ konačna veličina.

III svojstvo.

Red potencija konvergira u n i f o r m n o u svakom zatvorenom intervalu, koji leži u nutrini intervala konvergencije.

Posljedice.

1. Suma $f(x)$ reda potencija je neprekinuta funkcija za svaki x, koji leži u nutrini intervala konvergencije $2R$ toga reda, jer znamo da je suma reda funkcija neprekinuta funkcija u intervalu u kojem dotični red konvergira uniformno [vidi tačku 7, b) ovog §].

2. Budući da red derivacija reda potencija konvergira u istom intervalu kao i zadani red, dakle također konvergira uniformno u tom intervalu, red potencija smijemo derivirati član po član i dobiveni red derivacija ima za sumu derivaciju sume onog reda, koji smo derivirali, jer znamo

da red funkcija smijemo derivirati član po član, ako zadani red i dobiveni red derivacija konvergiraju uniformno (vidi tačku 7. ovog §).

Npr. ako deriviramo red za $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

dobijemo red za $\sin x$:

$$-\sin x = -\frac{1}{2!} \cdot 2x + \frac{1}{4!} \cdot 4x^3 - \frac{1}{6!} 6x^5 + \cdots$$

ili

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

S istog razloga dat će deriviranje reda za e^x opet red za e^x. Pokaži to!

Na kraju navedimo nekoliko primjera za razvoj funkcija.

Primjeri:

1. Razvij polinom $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ po potencijama binoma $(x + 1)$.

Zadatak traži razvoj zadanog polinoma po Taylorovoj formuli (146a) i to iz tačke M_0 apscise $x_0 = -1$.

$f(x_0) = -1 + 3 + 2 + 4 = 8$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$; $\quad f'(x_0) = -5$

$f''(x) = 6x + 6$ $\quad f''(x_0) = 0$

$f'''(x) = 6$ $\quad f'''(x_0) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0$

$$y = 8 + (x + 1)(-5) + \frac{(x + 1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(x + 1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6$$

ili

$$\underline{y = (x + 1)^3 - 5(x + 1) + 8.}$$

2. Razvij u red potencija funkciju $y = x^3 \ln x$ iz $x_0 = 1$.

Zadatak se svodi na razvoj zadane funkcije u Taylorov red po formuli (146a) polazeći iz tačke M_0 apscise $x_0 = 1$.

$f(1) = 1 \cdot \ln 0 = 0$

$f'(x) = x^2 + 3x^2 \ln x$; $\quad f'(1) = 1$

$f''(x) = 2x + 3(x + 2x \ln x) = 5x + 6x \ln x$; $\quad f''(1) = 5$

$f'''(x) = 5 + 6 + 6 \ln x$; $\quad f'''(1) = 11$

$f^{(4)} x = \frac{6}{x}$; $\quad f^{(4)}(1) = 6$

$f^{(5)}(x) = -\frac{6}{x^2}$; $\quad f^{(5)}(1) = -6$

$$\underline{x^3 \ln x = (x - 1) + \frac{5}{2!}(x - 1)^2 + \frac{11}{3!}(x - 1)^3 + \frac{6}{4!}(x - 1)^4 - \frac{6}{5!}(x - 1)^5 + - \ldots}$$

3. Razvij u red potencija funkciju $y = \sin^2 x$ iz $x = 0$.

Zadatak traži razvoj zadane funkcije u Mac Laurinov red (145).

$f(0) = 0$

$f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$; $f'(0) = 0$

$f''(x) = 2\cos 2x$; $f''(0) = 2$

$f'''(x) = -4\sin 2x$; $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = -8\cos 2x$; $f^{(4)}(0) = -8 = -2^3$

$f^{(5)}(x) = 16\sin 2x$; $f^{(5)}(0) = 0$

$f^{(6)}(x) = 32\cos 2x$; $f^{(6)}(0) = 32 = 2^5$

$$\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - + \dots$$

§ 21.

EULEROVE FORMULE. TREĆI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

Da dobijemo vrlo važne Eulerove formule uvrstimo u Mac Laurinov red za e^x (147):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

ix mjesto x, gdje je $i = \sqrt{-1}$ = imaginarna jedinica, pri čemu uzmemo u obzir, da je

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^6 &= i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Kako vidimo, dalje se vrijednosti potencija i ponavljaju, pa možemo lako napisati bilo koju potenciju broja i. Npr. $i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$.

Dobijemo:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

ili ako skupimo posebno realne i posebno imaginarne članove:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right).$$

U prvoj je zagradi red za $\cos x$ (152), a u drugoj red za $\sin x$ (150).

Dobije se konačno:

I Eulerova formula:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \qquad (165)$$

Uvrsti li se ovamo $-x$ mjesto x i uzme li se u obzir da je $\cos(-x) = \cos x$, a $\sin(-x) = -\sin x$, dobije se

II Eulerova formula:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \qquad (165a)$$

Zbrojimo li te dvije formule, odnosno oduzmemo li od prve drugu, dobijemo

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$
$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x,$$

a odatle je

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \qquad (166)$$

$\sin x$ i $\cos x$ prikazali smo u oblicima sličnim izrazima za $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$, ali argument je sada imaginaran.

Iz prve Eulerove formule lako dobijemo nov oblik kompleksnog broja.

Znamo već dva oblika (vidi § 1):

obični: $z = x + iy$,

trigonometrijski: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. (a)

Uzevši u obzir, da je prema (165) $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, dobijemo iz (a) treći oblik kompleksnog broja:

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (167)$$

Taj oblik je osobito važan u elektrotehnici. U mnogim publikacijama iz područja elektrotehnike $e^{i\varphi}$ tiska se u obliku $e^{j\varphi}$, tj. imaginarna jedinica i označava se s j. To je učinjeno zbog toga, što se u elektrotehnici momentana vrijednost izmjenične električne struje označava s i, pa se na taj način izbjegava zabuna do koje bi označivanje imaginarne jedinice s i moglo dovesti.

§ 22.

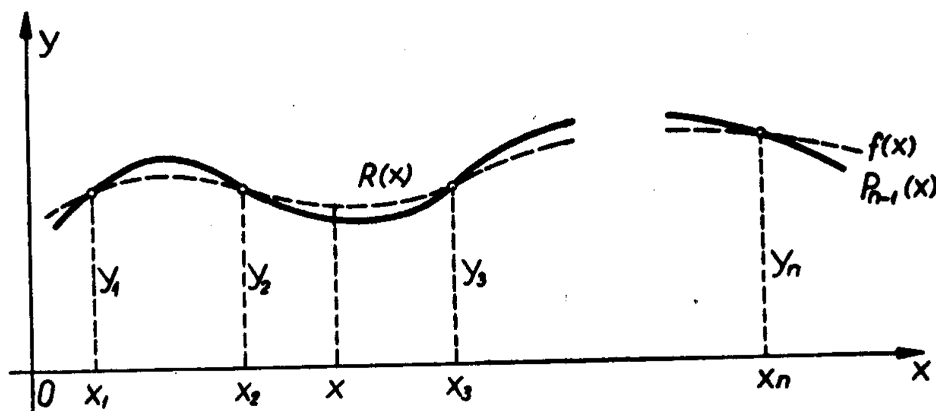
INTERPOLACIJA. LAGRANGEOVA FORMULA

Pretpostavimo da smo na neki način, npr. mjerenjem, dobili n tačaka u ravnini

$$T_1(x_1, y_1); \quad T_2(x_2, y_2), \quad T_3(x_3, y_3), \ldots\ldots, T_n(x_n, y_n),$$

koje smo nanijeli u koordinatnom sustavu (X, Y) (vidi sl. 143).

U međutačkama x, tj. u tačkama između x_1 i x_2, x_2 i x_3 itd. ne znamo vrijednosti funkcije, jer u tim tačkama nismo vršili mjerenja. Nastaje pitanje, koje ćemo vrijednosti uzeti u tim međutačkama? Kroz n tačaka možemo povući bezbroj krivulja, ali znamo, da je s n tačaka jednoznačno određen polinom $(n-1)$-ga stepena (vidi teorem identičnosti polinoma, § 4). Da naš problem riješimo jednoznačno, zamislimo, da kroz n zadanih tačaka prolazi graf polinoma $(n-1)$-ga stepena pa ćemo u međutačkama mjesto vrijednosti funkcije koje nam u tim tačkama nisu poznate, uzimati ordinate, tj. vrijednosti toga polinoma P_{n-1}. Ta se operacija zove interpolacija.



Sl. 143.

Uzmemo li vrijednosti toga polinoma za tačke koje leže izvan područja mjerenja tj. za tačke na lijevo od x_1 i na desno od x_n tada vršimo ekstrapolaciju, koja daje vrlo nesigurne rezultate.

Pretpostavimo da smo uzeli samo dvije tačke funkcije $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$. Sa dvije tačke jednoznačno je određen polinom prvog stepena $P_1(x)$, tj. pravac. Znamo jednadžbu pravca kroz dvije tačke:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Tu jednadžbu možemo lako prikazati u obliku koji slijedi i u kojem je y zamijenjen s $P_1(x)$:

$$y = P_1(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Uzimajući za x od x_1 do x_2 mjesto vrijednosti funkcije vrijednosti toga polinoma $P_1(x)$, tj. vrijednosti linearne funkcije odnosno ordinate pravca, vršimo linearnu interpolaciju, koja nam je dobro poznata iz računanja s logaritamskim tablicama.

Ako su nam poznate tri tačke funkcije $T_1(x_1, y_1)$ $T_2(x_2, y_2)$ i $T_3(x_3, y_3)$, uzimamo u međutačkama ordinate parabole, tj. vrijednosti polinoma drugog stepena, koji glasi:

$$y = P_2(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} +$$
$$+ y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Taj polinom ustvari prolazi kroz tri zadane tačke, jer uvrštenje $x = x_1$, $x = x_2$ i $x = x_3$ daje y_1, y_2 i y_3.

To je parabolička interpolacija koja se praktički primjenjuje uvijek tada, kada druge tablične razlike nisu jednake, npr. pri računanju s logaritamskim tablicama od 10 decimala.

Uzmemo napokon općenito da poznamo n tačaka zadane funkcije $T_1(x_1, y_1)$ $T_2(x_2, y_2)$, ..., $T_n(x_n, y_n)$. U tom slučaju vršimo interpolaciju pomoću polinoma $P_{n-1}(x)$, koji glasi:

$$P_{n-1}(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots\cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots\cdots (x_1 - x_n)} +$$
$$+ y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3) \cdots\cdots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots\cdots (x_2 - x_n)} + \cdots\cdots \quad (168)$$
$$\cdots\cdots + y_n \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots\cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots\cdots (x_n - x_{n-1})}.$$

To je Langrangeova interpolaciona formula.

(Pazi: u brojnik svakog člana formule ne smije doći x s indeksom, koji ima y toga člana, već svi ostali x, dok je prvi član svakog faktora u nazivniku uvijek onaj x koji nismo smjeli pisati u brojniku, a ostali se x jednostavno prepisuju prema brojniku).

Aproksimirajući zadanu funkciju $f(x)$ u intervalu od x_1 do x_n pomoću Lagrangeova interpolacionog polinoma (168), vršimo pogrešku $R(x)$

(vidi sl. 143), koju naravno ne možemo izračunati već samo ocijeniti prema formuli:

$$R(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n),$$

gdje je $x_1 < \xi < x_n$, inače je ξ neodređen, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ apscise su poznatih tačaka funkcije $f(x)$.

Pomoću te formule može se pokazati, da je pogreška koju vršimo kad linearno interpoliramo pri računanju logaritama brojeva pomoću logaritamskih tablica od 5 decimala manja od $\frac{1}{10^7}$, tj. manja od jedinice sedmog decimalnog mjesta, tako da je nakon interpolacije i peta znamenka mantise svakog logaritma broja potpuno sigurna.

Primijetimo još, da se linearna interpolacija vrši i kod upotrebe logaritamskih tablica od 6, 7 i 8 decimala. Pogreška interpolacije umanjuje se time, što se povećava broj znamenaka brojeva, čiji su logaritmi navedeni u tim tablicama, a stoga je obujam tih tablica znatno veći. Postoje još i druge formule za interpolaciju, npr. Newtonova.

Primjeri.

1. Aproksimiraj $\sin x$ pomoću Lagrangeova interpolacionog polinoma, ako su poznate vrijednosti funkcije za $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, $x_5 = 2\pi$.

Budući da je zadano 5 tačaka, polinom će prema (168) glasiti:

$$P_4(x) = y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)} +$$

$$+ y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)} +$$

$$+ y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)} +$$

$$+ y_4\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)} +$$

$$+ y_5\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)}.$$

Računamo:

za $x_1 = 0$ $\quad y_1 = \sin 0 = 0$

za $x_2 = \frac{\pi}{2}$ $\quad y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

za $x_3 = \pi$ $\quad y_3 = \sin\pi = 0$

za $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ $\quad y_4 = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

za $x_5 = 2\pi$ $\quad y_5 = \sin 2\pi = 0$

Uvrštenje tih vrijednosti u $P_4(x)$ daje:

$$y = 0 + 1 \frac{(x-0)(x-\pi)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)(x-2\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\right)} + 0 -$$

$$-1 \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)(x-2\pi)}{\left(\frac{3\pi}{2}-0\right)\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi\right)} + 0 .$$

Odatle:

$$y = \frac{x(x-\pi)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)(x-2\pi)}{\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot(-\pi)\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} - \frac{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)(x-2\pi)}{\frac{3\pi}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

ili $\quad y = \frac{8}{3\pi^4} x(x-\pi)(x-2\pi)\left[-\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

ili $\quad y = \frac{8}{3\pi^3} x(x-\pi)(x-2\pi)$.

Dobili smo, dakle, polinom trećeg stepena:

$P_3(y) = \frac{8}{3\pi^3} x(x-\pi)(x-2\pi)$, koji konačno prima oblik:

$$\underline{y = \frac{8}{3\pi^3} x(x^2 - 3\pi x + 2\pi^2)} \qquad (a)$$

ili ako uzmemo da je $\pi \doteq 3{,}14$ (računamo s logaritamskim računalom):

$$\underline{y = P_3(x) = 0{,}09x(x^2 - 9{,}42x + 19{,}72).}$$

Kontrola računa:

Prema (a) $y = \frac{8}{3\pi^3} x(x^2 - 3\pi x + 2\pi^2)$ dobijemo:

za $x_1 = 0 \qquad y_1 = 0$

za $x_2 = \frac{\pi}{2} \qquad y_2 = 1$

za $x_3 = \pi \qquad y_3 = 0$

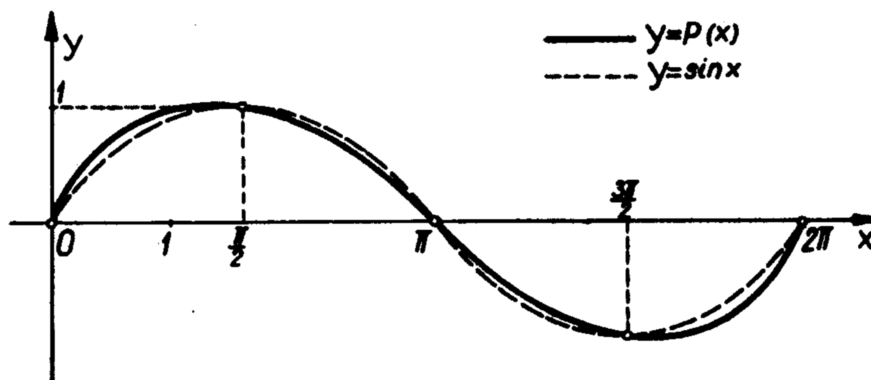
za $x_4 = \frac{3\pi}{2} \qquad y_4 = -1$

za $x_5 = 2\pi \qquad y_5 = 0$.

Sl. 144 prikazuje zadanu funkciju $\sin x$ i njenu aproksimaciju pomoću izračunatog Lagrangeova interpolacionog polinoma $P_4(x)$.

2. Da se odredi dopušteno opterećenje željeznih lanaca, kojima su karike kružnog presjeka promjera d, bilo je pokusnim putem određeno dopušteno opterećenje P. Za

lance promjera $d_1 = 8$ mm, $d_2 = 16$ mm i $d_3 = 20$ mm dobiveno je $P_1 = 400$ kg, $P_2 = 1600$ kg i $P_3 = 2500$ kg. Treba sastaviti tablicu dopuštenih opterećenja za lance, kojima je promjer d karika 6 mm, 11 mm, 13 mm, 18 mm, 25 mm i 30 mm.



Sl. 144.

Problem rješavamo pomoću Lagrangeove interpolacione formule. Kako su pokusima određene samo tri vrijednosti, dobit ćemo prema (168) označivši d sa x a P sa y polinom drugog stepena (parabolička interpolacija):

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Uvrštenje

$$x_1 = d_1 = 8, \quad y_1 = P_1 = 400$$

$$x_2 = d_2 = 16, \quad y_2 = P_2 = 1600$$

$$x_3 = d_3 = 20, \quad y_3 = P_3 = 2500$$

daje:

$$y = 400 \frac{(x - 16)(x - 20)}{(8 - 16)(8 - 20)} + 1600 \frac{(x - 8)(x - 20)}{(16 - 8)(16 - 20)} + 2500 \frac{(x - 8)(x - 16)}{(20 - 8)(20 - 16)}.$$

Nakon uređenja dobijemo:

$$y = \frac{25}{4} x^2$$

ili, kako je $y = P$, a $x = d$:

$$P = \frac{25}{4} d^2$$

Uvrštavajući redom u tu formulu $d = 6$ mm, $d = 11$ mm, $d = 13$ mm, $d = 18$ mm, $d = 25$ mm i $d = 30$ mm dobijemo pripadne vrijednosti P dopuštenih opterećenja. Te vrijednosti uvrštene su u tablicu, koja slijedi i u kojoj su vrijednosti, dobivene pokusnim putem, podvučene:

d mm	6	8	11	13	16	18	20	25	30
P kg	225	<u>400</u>	756	1056	<u>1600</u>	2025	<u>2500</u>	3806	5625

Iz tablice vidimo da smo za $d = 6$ mm, $d = 25$ mm i $d = 30$ mm vršili ekstrapolaciju, ipak se i ti rezultati neznatno razlikuju od stvarnih.

3. Poznato je pet tačaka funkcije $y = F(x)$ i to: $A(0, 1)$, $B(1, -3)$, $C(3, 25)$, $D(4, 129)$ i $E(5, 381)$.

Izračunaj vrijednosti y za $x = 0{,}5$ i $x = 2$ i to

a) pomoću linearne interpolacije,

b) pomoću Lagrangeove interpolacione formule.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a)} \quad -1\,;\; 11 \\ \text{b)} -\dfrac{15}{16}\,;\; -3 \end{array}\right]$$